Développements limités

Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Table des matières

Prérequis et objectifs **2**

1 Introduction et motivation **2**

2 Définitions et propriétés fondamentales **2**
- 2.1 Développement limité en un point . . . 2
- 2.2 Unicité du développement limité . . . 3
- 2.3 Conséquences immédiates . . . 3

3 Théorème de Taylor-Young **3**

4 Développements limités usuels **4**
- 4.1 Fonctions exponentielles et logarithmiques . . . 4
- 4.2 Fonctions trigonométriques . . . 4
- 4.3 Fonctions hyperboliques . . . 5
- 4.4 Autres exemples utiles . . . 5

5 Opérations sur les développements limités **5**
- 5.1 Somme et multiplication par un scalaire . . . 5
- 5.2 Produit . . . 6
- 5.3 Quotient . . . 6
- 5.4 Composition . . . 6
- 5.5 Intégration . . . 7

6 Applications des développements limités **7**
- 6.1 Calcul de limites . . . 7
- 6.2 Détermination d'équivalents . . . 8
- 6.3 Étude d'une tangente . . . 8
- 6.4 Recherche d'un extremum local . . . 8
- 6.5 Position relative de deux courbes . . . 8

7 Exemples de synthèse **9**
- 7.1 Un quotient dont les premiers termes s'annulent . . . 9
- 7.2 Développement limité en un point différent de zéro . . . 9
- 7.3 Étude locale d'une courbe . . . 9

8 Limites de la méthode et précautions **10**

9 Liste d'exercices **10**

10 Indications de correction **12**

11 Conclusion **13**

Prérequis et objectifs

Prérequis. Cette leçon suppose connues les notions de limite et de continuité d'une fonction, les équivalents et les relations de négligeabilité, les fonctions usuelles, ainsi que les règles de calcul sur les polynômes. La dérivation, le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis et les suites de fonctions dérivées constituent des outils importants pour établir certains résultats. Une familiarité avec les séries entières est utile, mais n'est pas indispensable à l'étude des développements limités à un ordre fixé.

Objectifs. L'objectif est de comprendre comment approcher localement une fonction par un polynôme, de savoir établir et manipuler des développements limités, puis de les utiliser pour calculer des limites, déterminer des équivalents, étudier des positions relatives de courbes et rechercher des tangentes. On veillera à distinguer un développement limité d'un développement en série entière et à justifier précisément les opérations effectuées sur les restes.

1 Introduction et motivation

L'étude locale d'une fonction consiste à décrire son comportement au voisinage d'un point. La limite donne une première information, mais elle ne permet pas toujours de distinguer deux fonctions qui tendent vers la même valeur. Les équivalents apportent une précision supplémentaire, sans pour autant fournir systématiquement une description suffisamment fine.

Les développements limités permettent de représenter une fonction, à un ordre donné, par un polynôme et un reste négligeable devant une puissance appropriée de la variable.

Cette approximation polynomiale est fondamentale en analyse : elle simplifie les calculs de limites, précise les comportements asymptotiques et fournit des informations géométriques sur les courbes représentatives.

Par exemple, lorsque x tend vers 0,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ainsi, le polynôme $1 + x + \frac{x^2}{2}$ approche la fonction exponentielle avec une erreur négligeable devant x^2.

2 Définitions et propriétés fondamentales

2.1 Développement limité en un point

Définition 2.1. *Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que*

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n) \qquad (h \to 0).$$

On écrit alors

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n).$$

Le polynôme

$$P_n(h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k$$

est appelé partie régulière du développement limité.

La notation $o(h^n)$ signifie que le reste $r(h)$ vérifie

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

En particulier, pour $n = 0$, un développement limité correspond à une approximation par une constante avec une erreur tendant vers zéro.

Remarque 2.2. Pour étudier une fonction au voisinage de a, on pose $h = x - a$. On travaille alors au voisinage de $h = 0$. Cette translation simplifie considérablement les écritures.

2.2 Unicité du développement limité

Théorème 2.3 (Unicité)**.** *Si une fonction admet un développement limité à l'ordre n en a, alors les coefficients de ce développement sont uniques.*

Démonstration. Supposons que deux polynômes P et Q, de degrés au plus n, fournissent des développements limités de f au même ordre. Alors

$$P(h) - Q(h) = o(h^n).$$

Si $P - Q$ n'est pas nul, soit $k \leq n$ le plus petit indice dont le coefficient est non nul. Il existe alors $c \neq 0$ tel que

$$P(h) - Q(h) = ch^k + o(h^k).$$

En divisant par h^k, on obtient

$$\frac{P(h) - Q(h)}{h^k} \longrightarrow c \neq 0.$$

Mais $P(h) - Q(h) = o(h^n)$ implique aussi $P(h) - Q(h) = o(h^k)$ puisque $k \leq n$. Le quotient précédent devrait donc tendre vers zéro, contradiction. Ainsi $P = Q$. □

2.3 Conséquences immédiates

Si

$$f(a + h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n),$$

alors, en particulier,

$$f(a) = a_0$$

lorsque f est définie et continue en a. Plus généralement, le développement limité fournit une information précise sur les premières variations de f autour de a.

Lorsque f est dérivable en a, son développement limité à l'ordre 1 s'écrit

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + o(h).$$

On retrouve ainsi l'approximation affine associée à la tangente.

3 Théorème de Taylor-Young

Théorème 3.1 (Taylor-Young)**.** *Soit f une fonction définie au voisinage de a et n fois dérivable sur un voisinage de a. Si $f^{(n)}$ existe au voisinage de a et est continue en a, alors*

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

La formule de Taylor-Young est l'outil principal pour obtenir un développement limité à partir des dérivées successives.

Remarque 3.2. Il suffit notamment que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a. La formule de Taylor-Young ne fournit pas, à elle seule, une estimation explicite du reste. Pour une telle estimation, on peut utiliser la formule de Taylor avec reste intégral ou la formule de Taylor-Lagrange, sous leurs hypothèses respectives.

Exemple 3.3. Pour $f(x) = e^x$, toutes les dérivées sont égales à e^x. En 0, elles valent toutes 1. Par Taylor-Young,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Exemple 3.4. Pour $f(x) = \ln(1+x)$, définie pour $x > -1$, on a

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = -1,$$

et, plus généralement,

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)! \quad (k \geq 1).$$

Ainsi,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

4 Développements limités usuels

Les développements suivants sont à connaître et constituent une base pour les calculs.

4.1 Fonctions exponentielles et logarithmiques

Au voisinage de 0,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n),$$

où

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Cette formule est valable pour x suffisamment proche de 0, de façon à ce que $1 + x > 0$ lorsque cela est nécessaire.

Pour le logarithme,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

4.2 Fonctions trigonométriques

On dispose des développements suivants :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + o(x^{2p+1}),$$

où la somme est arrêtée au terme de degré $2p+1$;

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + o(x^{2p}),$$

où la somme est arrêtée au terme de degré $2p$.

En particulier,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

4.3 Fonctions hyperboliques

Par définition,

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On en déduit

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + o(x^{2p+1}),$$

avec arrêt au degré $2p+1$, et

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + o(x^{2p}),$$

avec arrêt au degré $2p$.

4.4 Autres exemples utiles

Pour la fonction inverse,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Pour la fonction tangente, jusqu'à l'ordre 5,

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

Ces formules sont valables au voisinage de 0 et s'obtiennent par Taylor-Young ou par les opérations sur les développements limités.

5 Opérations sur les développements limités

Dans cette section, les développements sont considérés au voisinage de 0, sauf mention contraire.

5.1 Somme et multiplication par un scalaire

Si

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n), \qquad g(x) = Q_n(x) + o(x^n),$$

alors

$$f(x) + g(x) = P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n).$$

De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda f(x) = \lambda P_n(x) + o(x^n).$$

5.2 Produit

Le produit de deux développements limités se calcule en multipliant les parties régulières puis en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à l'ordre recherché.

Exemple 5.1. À l'ordre 3, calculons le développement limité de $e^x \cos x$.

On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

En multipliant et en supprimant les termes de degré supérieur à 3, on obtient

$$e^x \cos x = 1 + x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) x^3 + o(x^3).$$

Par conséquent,

$$\boxed{e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).}$$

5.3 Quotient

Si $g(x) \to b \neq 0$ lorsque $x \to 0$, alors $1/g$ est définie au voisinage de 0 et admet un développement limité dès lors que l'on dispose d'un développement de g et que l'on applique la règle d'inversion appropriée.

En particulier, si

$$g(x) = b + u(x), \qquad b \neq 0, \qquad u(x) \to 0,$$

on écrit

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b} \frac{1}{1 + u(x)/b}.$$

On utilise alors le développement de $1/(1+t)$ au voisinage de $t = 0$, en tronquant au bon ordre.

Exemple 5.2. Déterminons le développement limité à l'ordre 2 de

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}.$$

Comme

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2),$$

on obtient

$$f(x) = (1+x)(1 + x + x^2 + o(x^2)).$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2).}$$

5.4 Composition

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités appropriés, avec $g(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$. On peut substituer le développement de $g(x)$ dans celui de f si les hypothèses de composition sont satisfaites et si l'ordre des restes est contrôlé.

Exemple 5.3. Calculons le développement limité à l'ordre 4 de $\cos(x^2)$.

On utilise

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

En posant $u = x^2$, on obtient

$$\boxed{\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4).}$$

5.5 Intégration

Si une fonction continue admet un développement limité

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

alors, en intégrant entre 0 et x,

$$\int_0^x f(t)\,dt = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

En effet, l'intégrale d'un reste $o(t^n)$ est un reste $o(x^{n+1})$.

Remarque 5.4. La dérivation d'un développement limité n'est pas une opération automatiquement valable pour le reste : de $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$, on ne peut pas déduire en général $f'(x) = P_n'(x) + o(x^{n-1})$ sans hypothèses supplémentaires.

6 Applications des développements limités

6.1 Calcul de limites

Les développements limités permettent de traiter les formes indéterminées lorsque les premiers termes non nuls peuvent être identifiés.

Exemple 6.1. Calculons

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

À l'ordre 2,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Par conséquent,

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1),$$

d'où

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}.}$$

Exemple 6.2. Calculons

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Comme

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

on obtient

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1).$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.}$$

6.2 Détermination d'équivalents

Proposition 6.3. *Si*

$$f(x) = a_k x^k + o(x^k), \qquad a_k \neq 0,$$

alors

$$f(x) \sim a_k x^k \qquad (x \to 0).$$

Le premier terme non nul d'un développement limité fournit donc un équivalent de la fonction.

Exemple 6.4. Puisque

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

on obtient

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \qquad (x \to 0).$$

6.3 Étude d'une tangente

Supposons que f admette un développement limité à l'ordre 2 en a :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + ch^2 + o(h^2).$$

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

La différence entre la fonction et sa tangente est

$$f(a+h) - f(a) - f'(a)h = ch^2 + o(h^2).$$

Si $c \neq 0$, le signe de cette différence est celui de c pour h suffisamment proche de 0, avec $h \neq 0$. Cela permet de déterminer la position locale de la courbe par rapport à sa tangente.

6.4 Recherche d'un extremum local

Supposons que f admette un développement limité en a et que

$$f(a+h) - f(a) = ch^p + o(h^p), \qquad c \neq 0.$$

Si p est pair et $c > 0$, alors $f(a+h) > f(a)$ pour tout $h \neq 0$ suffisamment petit : a est un minimum local strict.

Si p est pair et $c < 0$, alors a est un maximum local strict.

Si p est impair, le terme dominant change de signe lorsque h change de signe. Il n'y a donc pas d'extremum local en a.

Remarque 6.5. Cette méthode précise le critère de la dérivée seconde. Elle s'avère utile lorsque les premières dérivées s'annulent.

6.5 Position relative de deux courbes

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités en a. On étudie le signe de

$$f(a+h) - g(a+h).$$

Si

$$f(a+h) - g(a+h) = ch^p + o(h^p), \qquad c \neq 0,$$

alors le signe de c donne le signe de la différence pour $h > 0$ suffisamment petit. Pour $h < 0$, le signe dépend aussi de la parité de p.

Cette méthode permet de déterminer quelle courbe est au-dessus de l'autre au voisinage du point considéré.

7 Exemples de synthèse

7.1 Un quotient dont les premiers termes s'annulent

Étudions

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

On utilise le développement limité à l'ordre 3 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Le numérateur devient

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Par conséquent,

$$\frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{3} + o(1),$$

et donc

$$\boxed{L = \frac{1}{3}.}$$

7.2 Développement limité en un point différent de zéro

Calculons le développement limité à l'ordre 2 de $f(x) = \ln x$ au voisinage de $a = 1$.
On pose $h = x - 1$. Alors

$$\ln x = \ln(1+h).$$

En utilisant le développement usuel du logarithme,

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

On obtient donc

$$\boxed{\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2).}$$

7.3 Étude locale d'une courbe

Considérons $f(x) = \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0. La formule du binôme généralisé donne

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

La tangente en 0 a pour équation

$$y = 1 + \frac{x}{2}.$$

La différence entre la fonction et sa tangente vaut

$$\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} = -\frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Comme le coefficient du terme dominant est négatif, la courbe est située sous sa tangente au voisinage de 0, sauf au point de tangence.

8 Limites de la méthode et précautions

Plusieurs précautions doivent être rappelées lors d'un oral.

— **Choix de l'ordre.** L'ordre du développement doit être suffisant pour faire apparaître le premier terme non nul du numérateur ou de la différence étudiée.

— **Contrôle du reste.** Le reste doit être exprimé à un ordre compatible avec les opérations effectuées. Une écriture imprécise peut conduire à une conclusion fausse.

— **Composition.** Il faut vérifier que l'argument du développement tend bien vers le point où ce développement est valable et contrôler l'ordre des termes obtenus.

— **Division.** Le dénominateur doit être traité avec soin. S'il s'annule au point considéré, il faut déterminer son premier terme non nul avant de conclure.

— **Dérivation.** Un développement limité ne peut pas être dérivé terme à terme sans hypothèses supplémentaires sur la fonction et sur le reste.

— **Développement limité et série entière.** Un développement limité est une approximation à un ordre fixé. Il ne suppose pas que la fonction soit égale à une série entière convergente.

9 Liste d'exercices

Les exercices suivants permettent de travailler les calculs, les applications et les limites de validité de la méthode. Les ordres indiqués sont à respecter.

Exercice 1 – Développements usuels

Établir à l'ordre 4 les développements limités en 0 de

$$e^x, \qquad \ln(1+x), \qquad \frac{1}{1+x}, \qquad \cos x.$$

Comparer les premiers termes non nuls de $\ln(1+x)$ et de $\sin x$.

Exercice 2 – Produit

Déterminer à l'ordre 4 le développement limité en 0 de

$$f(x) = e^x \sin x.$$

En déduire un équivalent de $f(x) - x$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 3 – Quotient

Déterminer à l'ordre 3 le développement limité en 0 de

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}.$$

Vérifier le résultat en calculant les dérivées successives de f en 0.

Exercice 4 – Composition

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 de

$$f(x) = \ln(1 + \sin x).$$

Préciser les termes qui s'annulent lors de la composition.

Exercice 5 – Calcul de limites

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Exercice 6 – Équivalents

Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de chacune des fonctions suivantes :

$$e^x - 1 - x, \qquad \ln(1+x) - x, \qquad \sin x - x, \qquad \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}.$$

Exercice 7 – Tangente

Soit

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Déterminer l'équation de la tangente en 0, puis étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 8 – Extremum

Étudier les extrema locaux en 0 des fonctions

$$f(x) = 1 - \cos x, \qquad g(x) = \sin x, \qquad h(x) = x^4 - 2x^6.$$

Justifier les conclusions par les développements limités.

Exercice 9 – Point d'inflexion

Étudier la position de la courbe de

$$f(x) = \ln(1+x)$$

par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0. Le développement limité permet-il de conclure sur la présence d'un point d'inflexion en ce point ?

Exercice 10 – Développement en un point

Déterminer à l'ordre 3 le développement limité en $x = 1$ de

$$f(x) = \ln x, \qquad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Comparer les résultats obtenus avec ceux fournis par Taylor-Young.

Exercice 11 – Une limite plus délicate

Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

Préciser pourquoi un développement limité à l'ordre 2 ne suffit pas.

Exercice 12 – Développement limité et dérivation

Donner un exemple montrant que l'on ne peut pas, en général, dériver terme à terme un développement limité en conservant le comportement attendu du reste. On pourra étudier

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin(1/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Déterminer le développement limité de f en 0 et étudier la dérivabilité de f.

Exercice 13 – Problème de synthèse

Soit

$$f(x) = \frac{\sin x}{\ln(1+x)}$$

pour x voisin de 0, avec $x \neq 0$ et $x > -1$. Déterminer le comportement de $f(x)$ au voisinage de 0 :

a) montrer que $f(x) \to 1$;

b) calculer son développement limité à l'ordre 2 ;

c) en déduire une approximation de $f(x) - 1$.

10 Indications de correction

— **Exercice 2.** Multiplier les développements de e^x et de $\sin x$, en ne conservant que les termes jusqu'au degré 4.

— **Exercice 3.** Utiliser

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3),$$

puis multiplier par le développement de e^x.

— **Exercice 4.** Poser $u = \sin x$ et utiliser le développement de $\ln(1+u)$. Il faut conserver suffisamment de termes dans le développement de $\sin x$ pour obtenir l'ordre demandé.

— **Exercice 5.** Utiliser les développements limités jusqu'au premier terme non nul après simplification du numérateur.

— **Exercice 7.** La tangente est $y = 1 - x$. On peut utiliser l'identité

$$\frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x}.$$

— **Exercice 8.** Examiner le premier terme non nul de $f(x) - f(0)$, $g(x) - g(0)$ et $h(x) - h(0)$.

— **Exercice 12.** On a $f(x) = o(x^3)$, donc le développement limité à l'ordre 3 est nul. Pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = 4x^3 \sin(1/x^2) - 2x \cos(1/x^2).$$

Cette expression montre que $f'(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$, tandis que la dérivée en 0 se calcule par le taux d'accroissement. Cet exemple permet de discuter avec précision les hypothèses nécessaires à la dérivation d'un développement limité.

— **Exercice 13.** Développer séparément le numérateur et le dénominateur, puis factoriser le terme dominant du dénominateur avant d'effectuer la division.

11 Conclusion

Les développements limités constituent un outil central de l'analyse locale. Ils permettent d'approcher une fonction par un polynôme, de calculer des limites délicates, de trouver des équivalents et d'étudier le comportement géométrique d'une courbe.

Le théorème de Taylor-Young fournit un cadre théorique pour construire ces approximations. Les développements usuels et les règles de calcul permettent ensuite de traiter de nombreux exemples sans calculer systématiquement toutes les dérivées.

Le point méthodologique essentiel est le choix de l'ordre : il faut développer suffisamment loin pour faire apparaître le premier terme non nul utile à l'étude. La maîtrise des restes et des hypothèses de validité est indispensable pour garantir la rigueur des conclusions.

Références

[1] Xavier Gourdon, *Les Maths en tête – Analyse*, Ellipses, édition à consulter selon le programme préparé.

[2] Jean-Marie Monier, *Analyse MP*, Dunod, collection J'intègre, édition à consulter.

[3] Henri Cartan, *Calcul différentiel*, Hermann, Paris.

[4] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, édition à consulter.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes et ressources en mathématiques pour les classes préparatoires scientifiques et les concours de recrutement des enseignants*. Portail officiel : https://www.devenirenseignant.gouv.fr/