Lecon d'oral du CAPES de mathematiques

Series numeriques

Table des matières

1 Prerequis et objectifs **2**

2 Definition et proprietes fondamentales **2**
2.1 Sommes partielles et convergence . . . 2
2.2 Condition necessaire de convergence . . . 3
2.3 Linearity et reste . . . 3

3 Series de reference **3**
3.1 Series geometriques . . . 3
3.2 Series de Riemann . . . 4
3.3 Series telescopiques . . . 4

4 Series a termes positifs **4**
4.1 Critere de convergence par les sommes partielles . . . 4
4.2 Comparaison . . . 5
4.3 Critere de d'Alembert . . . 5
4.4 Critere de Cauchy . . . 5
4.5 Critere integral . . . 6

5 Series a termes reels ou complexes quelconques **6**
5.1 Convergence absolue . . . 6
5.2 Series alternees . . . 6
5.3 Exemple de convergence conditionnelle . . . 7

6 Developpements limites et series numeriques **7**

7 Applications **7**
7.1 Approximation numerique . . . 7
7.2 Probabilites discretes . . . 7
7.3 Calcul de moyennes et d'esperances . . . 8

8 Methodologie pour etudier une serie **8**

9 Liste d'exercices **8**
9.1 Exercice 1 – Series geometriques . . . 9
9.2 Exercice 2 – Series de Riemann . . . 9
9.3 Exercice 3 – Series telescopiques . . . 9
9.4 Exercice 4 – Comparaison et equivalence . . . 9
9.5 Exercice 5 – Critere de d'Alembert . . . 9
9.6 Exercice 6 – Critere integral . . . 10

9.7 Exercice 7 – Series alternees 10
9.8 Exercice 8 – Developpement limite 10
9.9 Exercice 9 – Une serie avec logarithme 10
9.10 Exercice 10 – Calcul et controle du reste 10
9.11 Exercice 11 – Application aux probabilites 10
9.12 Exercice 12 – Question de synthese 10

10 Indications et elements de correction **11**

11 Conclusion **11**

12 References bibliographiques **11**

1 Prerequis et objectifs

Prerequis

Cette lecon suppose connus :

— les suites numeriques et la notion de limite ;

— les proprietes des suites monotones et des suites bornees ;

— les operations sur les limites ;

— les sommes finies et les sommes telescopiques ;

— les inegalites, les valeurs absolues et les comparaisons ;

— les suites geometriques et les fonctions usuelles.

Selon le niveau retenu, on pourra egalement mobiliser les integrales, les developpements limites et les logarithmes.

Objectifs

L'objectif principal est de comprendre comment etudier la convergence d'une somme comportant une infinite de termes. Il s'agit notamment de :

— definir la convergence d'une serie a partir de ses sommes partielles ;

— distinguer convergence et divergence ;

— etablir des criteres de convergence utilisables en pratique ;

— reconnaitre les series de reference ;

— etudier les series a termes positifs, les series alternees et les series absolument convergentes ;

— savoir justifier rigoureusement le choix d'un critere ;

— mettre en evidence des applications des series numeriques.

La difficulte centrale consiste a passer de l'etude des termes individuels a celle de leur somme. La condition necessaire $u_n \to 0$ ne suffit pas, a elle seule, a assurer la convergence de $\sum u_n$.

2 Definition et proprietes fondamentales

2.1 Sommes partielles et convergence

Definition 2.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres reels ou complexes. La serie de terme general u_n est notee*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Sa somme partielle d'ordre N est

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

La serie converge si la suite (S_N) converge vers une limite finie S. On ecrit alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S.$$

Dans le cas contraire, la serie diverge.

Remarque 2.2. Une serie est une suite particuliere de sommes partielles. Il ne faut pas confondre le terme general u_n, la somme partielle S_N et la somme S de la serie.

2.2 Condition necessaire de convergence

Theoreme 2.3. *Si la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge, alors*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

Démonstration. On a, pour $n \geq 1$,

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Si $S_n \to S$, alors $S_{n-1} \to S$, donc

$$u_n \longrightarrow S - S = 0.$$

□

Remarque 2.4. La reciproque est fausse. La serie harmonique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

diverge, bien que $1/n \to 0$.

2.3 Linearity et reste

Proposition 2.5. *Si les series $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors, pour tous scalaires α, β,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Definition 2.6. *Pour une serie convergente de somme S, le reste d'ordre N est*

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

On a necessairement $R_N \to 0$.

Le controle du reste est essentiel pour obtenir des approximations numeriques de la somme.

3 Series de reference

3.1 Series geometriques

Proposition 3.1. *Soit $q \in \mathbb{C}$. La serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.}$$

En effet, pour $q \neq 1$,

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1-q}.$$

Si $|q| < 1$, alors $q^{N+1} \to 0$.

Pour $|q| \geq 1$, le terme general ne tend pas vers zero, sauf dans le cas particulier deja couvert par les hypotheses de convergence : la serie ne converge donc pas.

3.2 Series de Riemann

Theoreme 3.2. *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Idee de preuve. On utilise le critere integral pour $\alpha > 0$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

converge exactement lorsque $\alpha > 1$. Pour $\alpha \leq 0$, le terme general ne tend pas vers zero. □

Remarque 3.3. La serie harmonique correspond au cas $\alpha = 1$. Elle diverge logarithmiquement.

3.3 Series telescopiques

Exemple 3.4. Considerons

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \qquad n \geq 1.$$

La decomposition en elements simples donne

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Par consequent,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.}$$

4 Series a termes positifs

Dans cette section, on suppose que $u_n \geq 0$ pour tout n.

4.1 Critere de convergence par les sommes partielles

Theoreme 4.1. *La serie $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles*

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

est majoree.

Démonstration. Comme $u_n \geq 0$, la suite (S_N) est croissante. Si elle est majoree, elle converge par le theoreme de convergence des suites monotones. La reciproque est immediate. □

4.2 Comparaison

Theoreme 4.2 (Comparaison directe)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives telles que*

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

a partir d'un certain rang. Alors :

1. *si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge ;*
2. *si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge.*

Theoreme 4.3 (Comparaison par equivalence)**.** *Soient $u_n > 0$ et $v_n > 0$ a partir d'un certain rang. Si*

$$u_n \sim v_n \qquad (n \to +\infty),$$

alors les series $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de meme nature.

Exemple 4.4. Pour $n \to +\infty$,

$$\frac{n+1}{n^3+2n} \sim \frac{1}{n^2}.$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+2n}$$

converge donc par comparaison avec une serie de Riemann d'exposant 2.

4.3 Critere de d'Alembert

Theoreme 4.5. *Soit (u_n) une suite strictement positive a partir d'un certain rang. Si*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell,$$

alors :

- *si $\ell < 1$, la serie $\sum u_n$ converge ;*
- *si $\ell > 1$, la serie $\sum u_n$ diverge ;*
- *si $\ell = 1$, le critere ne permet pas de conclure.*

Exemple 4.6. Pour $u_n = 1/n!$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0.$$

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/n!$ converge.

4.4 Critere de Cauchy

Theoreme 4.7. *Soit (u_n) une suite positive. Si*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1,$$

alors $\sum u_n$ converge.
Si

$$\liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1,$$

alors la serie diverge.

Ce critere est particulierement utile lorsque le terme general comporte une puissance d'exposant n.

4.5 Critere integral

Theoreme 4.8. *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, decroissante et continue. Alors les series et integrales*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \quad et \quad \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

sont de meme nature.

Exemple 4.9. Pour $f(x) = 1/(x(\ln x)^p)$ sur $[2, +\infty[$, avec $p > 0$, le changement de variable $t = \ln x$ conduit a

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}.$$

La serie correspondante converge si et seulement si $p > 1$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

5 Series a termes reels ou complexes quelconques

5.1 Convergence absolue

Definition 5.1. *Une serie $\sum u_n$ est dite absolument convergente lorsque la serie positive*

$$\sum |u_n|$$

converge.

Theoreme 5.2. *Toute serie absolument convergente est convergente.*

Idee de preuve. Pour $p \geq q$, on a

$$\left| \sum_{n=q}^{p} u_n \right| \leq \sum_{n=q}^{p} |u_n|.$$

La convergence de $\sum |u_n|$ implique que ses restes tendent vers zero. Le critere de Cauchy pour les series permet alors de conclure. □

Remarque 5.3. La convergence absolue est plus forte que la convergence simple. Une serie convergente mais non absolument convergente est dite conditionnellement convergente.

5.2 Series alternees

Theoreme 5.4 (Critere de Leibniz)**.** *Soit (a_n) une suite positive, decroissante a partir d'un certain rang, et telle que $a_n \to 0$. Alors la serie alternee*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

converge.

De plus, si S designe sa somme et S_N sa somme partielle, on dispose de la majoration du reste :

$$\boxed{|S - S_N| \leq a_{N+1}.}$$

Exemple 5.5. La serie harmonique alternee

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

converge par le critere de Leibniz. Elle n'est pas absolument convergente, car la serie des valeurs absolues est la serie harmonique.

5.3 Exemple de convergence conditionnelle

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

converge, mais pas absolument. Elle illustre la distinction entre convergence et convergence absolue.

Il est important de noter que la convergence d'une serie ne permet pas, en general, de modifier librement l'ordre de ses termes. Pour les series reelles ou complexes absolument convergentes, les rearrangements conservent la somme.

6 Developpements limites et series numeriques

Les developpements limites permettent souvent de comparer un terme general a celui d'une serie de reference.

Exemple 6.1. Etudions la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right).$$

Au voisinage de zero,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Ainsi,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Le terme general est equivalent a $-1/(2n^2)$. La serie converge absolument.

Remarque 6.2. Un equivalent est un outil de comparaison adapte aux series a termes positifs. Pour des termes de signes quelconques, il convient de verifier les hypotheses du resultat utilise.

7 Applications

7.1 Approximation numerique

Pour une serie convergente, la somme partielle S_N approche la somme S. L'interet pratique reside dans le controle de l'erreur $|S - S_N|$.

Dans le cas d'une serie alternee verifiant le critere de Leibniz,

$$|S - S_N| \leq a_{N+1}.$$

Cette estimation fournit un moyen simple de determiner un rang suffisant pour obtenir une precision prescrite.

7.2 Probabilites discretes

Une loi de probabilite sur $\mathbb{N}$ est definie par une suite (p_n) telle que

$$p_n \geq 0, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1.$$

La normalisation repose donc sur la convergence d'une serie a termes positifs.

Exemple 7.1. Pour $0 < q < 1$, la suite

$$p_n = (1-q)q^n, \qquad n \geq 0,$$

definit une loi de probabilite puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1-q)q^n = 1.$$

7.3 Calcul de moyennes et d'esperances

Lorsqu'une variable aleatoire discrete X prend des valeurs dans $\mathbb{N}$ avec probabilites p_n, son esperance, lorsqu'elle est definie, s'ecrit

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} np_n.$$

La convergence de cette serie est une question distincte de la seule normalisation $\sum p_n = 1$.

8 Methodologie pour etudier une serie

Face a une serie $\sum u_n$, on peut suivre la demarche suivante.

1. Verifier si $u_n \to 0$. Si ce n'est pas le cas, la serie diverge.
2. Examiner le signe du terme general.
3. Rechercher une serie de reference : geometrique, harmonique ou de Riemann.
4. Si les termes sont positifs, envisager une comparaison, un equivalent, le critere de d'Alembert, celui de Cauchy ou le critere integral.
5. Si les signes varient, examiner la convergence absolue, puis rechercher eventuellement une structure alternee.
6. En cas de convergence, etudier si necessaire le reste pour obtenir une approximation de la somme.

Erreurs frequentes a eviter

— Confondre $u_n \to 0$ et la convergence de $\sum u_n$.

— Appliquer un critere de comparaison sans verifier les hypotheses de positivite.

— Conclure avec le critere de d'Alembert lorsque la limite du quotient vaut 1.

— Confondre convergence simple et convergence absolue.

— Oublier de justifier la decroissance dans le critere des series alternees.

— Utiliser un equivalent sans preciser le cadre dans lequel il conserve la nature de la serie.

9 Liste d'exercices

Les exercices suivants peuvent etre proposes pendant la preparation de l'oral ou utilises pour approfondir la lecon.

9.1 Exercice 1 – Series geometriques

Etudier la nature des series suivantes et calculer leur somme lorsqu'elles convergent :

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$;

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$;

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$.

9.2 Exercice 2 – Series de Riemann

Etudier la convergence de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

selon la valeur du parametre reel α.

9.3 Exercice 3 – Series telescopiques

Calculer la somme de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Indication : decomposer le terme general en elements simples.

9.4 Exercice 4 – Comparaison et equivalence

Etudier la convergence de chacune des series suivantes :

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{n^3+2}$;

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$;

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$.

9.5 Exercice 5 – Critere de d'Alembert

Etudier la nature des series :

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$;

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$;

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Pour le dernier exemple, expliquer pourquoi le critere de d'Alembert ne permet pas de conclure.

9.6 Exercice 6 – Critere integral

Etudier, selon le parametre $p \in \mathbb{R}$, la convergence de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

9.7 Exercice 7 – Series alternees

Etudier la convergence simple et absolue de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

9.8 Exercice 8 – Developpement limite

Etudier la nature de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right).$$

Indication : utiliser le developpement limite de $\sin x$ au voisinage de zero.

9.9 Exercice 9 – Une serie avec logarithme

Etudier la convergence de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

Indication : utiliser $\ln(1+x) \sim x$ lorsque $x \to 0$.

9.10 Exercice 10 – Calcul et controle du reste

On considere

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Determiner un entier N suffisant pour que l'erreur de la somme partielle S_N soit inferieure a 10^{-3}.

9.11 Exercice 11 – Application aux probabilites

Pour $0 < q < 1$, on pose

$$p_n = (1-q)q^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Verifier que (p_n) definit une loi de probabilite, puis calculer son esperance.

9.12 Exercice 12 – Question de synthese

Donner un exemple de chacune des situations suivantes :

a) une serie convergente a termes positifs ;

b) une serie divergente dont le terme general tend vers zero ;

c) une serie convergente mais non absolument convergente ;

d) une serie pour laquelle le critere de d'Alembert est muet ;

e) une serie dont la somme se calcule par telescopage.

10 Indications et elements de correction

1. Exercice 1 : utiliser la formule de la somme geometrique. Les deux premieres series convergent ; la troisieme diverge.
2. Exercice 2 : la serie converge si et seulement si $\alpha > 1$.
3. Exercice 3 :
$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$
Le telescopage donne une somme egale a $3/4$.
4. Exercice 4 : les series a) et c) convergent par comparaison avec une serie de Riemann d'exposant strictement superieur a 1. La serie b) diverge par equivalence a $1/n$.
5. Exercice 5 : a) et b) convergent par le critere de d'Alembert. Pour c), le quotient tend vers 1 : le critere est muet, mais la serie converge par le critere de Riemann.
6. Exercice 6 : convergence si et seulement si $p > 1$.
7. Exercice 7 : pour $\alpha > 0$, la serie converge par Leibniz. Elle converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.
8. Exercice 8 : on a
$$\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{6n^3}.$$
La serie converge.
9. Exercice 9 : le terme general est equivalent a $1/n^2$. La serie converge.
10. Exercice 10 : le critere de Leibniz donne $|S - S_N| \leq 1/(N+1)$. Il suffit de choisir $N+1 > 1000$.
11. Exercice 11 : la somme des probabilites vaut 1. De plus,
$$\mathbb{E}(X) = (1-q)\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{1-q}.$$
12. Exercice 12 : utiliser respectivement une serie de Riemann convergente, la serie harmonique, la serie harmonique alternee, une serie de Riemann et une serie telescopique.

11 Conclusion

Les series numeriques permettent d'etudier la convergence d'une somme infinie a partir des proprietes de son terme general et de ses sommes partielles. Les series geometriques et de Riemann constituent les references essentielles. Les criteres de comparaison, de d'Alembert, de Cauchy, integral et de Leibniz fournissent les outils principaux pour etablir la convergence.

Une presentation rigoureuse doit toujours distinguer la condition necessaire $u_n \to 0$, la convergence de la serie et la convergence absolue. Le controle du reste prolonge enfin l'etude theorique vers les applications numeriques.

12 References bibliographiques

Références

[1] X. Gourdon, *Les maths en tete – Analyse*, Ellipses. Ouvrage de synthese pour les suites, les series et les outils d'analyse.

[2] J.-M. Monier, *Analyse MPSI*, Dunod. Cours et exercices sur les suites, les series numeriques et les criteres de convergence.

[3] J.-P. Ramis, A. Warusfel et collaborateurs, *Mathematiques tout-en-un pour la licence – Niveau L1*, Dunod. Reference universitaire pour les fondements de l'analyse.

[4] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill. Reference classique pour les notions de convergence et les series dans un cadre rigoureux.

[5] T. M. Apostol, *Calculus, Volume I*, Wiley. Presentation approfondie des suites, series et applications du calcul integral.

[6] Ministere de l'Education nationale, *Programmes de mathematiques des classes preparatoires scientifiques et des classes du lycee*. Bulletins officiels et ressources institutionnelles disponibles sur le site du ministere : https://www.education.gouv.fr/.

[7] Ministere de l'Education nationale, *Concours du CAPES externe de mathematiques : programmes, epreuves et rapports de jury*. Consulter les textes et rapports correspondant a la session preparee sur le site officiel : https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.