Leçon : Séries de Fourier

Préparation à l'oral du CAPES de mathématiques

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**

2 Introduction et motivation **2**

3 Coefficients de Fourier **2**
- 3.1 Orthogonalité des fonctions trigonométriques . . . 2
- 3.2 Définition des coefficients réels . . . 3
- 3.3 Cas des fonctions paires et impaires . . . 3
- 3.4 Forme complexe . . . 3

4 Calcul de séries de Fourier : exemples **4**
- 4.1 Exemple 1 : la fonction $f(x) = x$ . . . 4
- 4.2 Exemple 2 : la fonction $f(x) = x^2$ . . . 4
- 4.3 Exemple 3 : une fonction créneau . . . 5

5 Convergence des séries de Fourier **5**
- 5.1 Convergence ponctuelle : théorème de Dirichlet . . . 5
- 5.2 Convergence uniforme . . . 6
- 5.3 Convergence quadratique et espace L^2 . . . 6
- 5.4 Identité de Parseval . . . 6

6 Applications **7**
- 6.1 Calcul de sommes numériques . . . 7
- 6.2 Analyse des signaux périodiques . . . 7
- 6.3 Équation de la chaleur . . . 7

7 Points de vigilance pour l'oral **7**

8 Liste d'exercices **8**

9 Conclusion **9**

1 Prérequis et objectifs

Prérequis. Cette leçon suppose une connaissance des fonctions périodiques, des intégrales de fonctions continues par morceaux, des suites et séries numériques, ainsi que des notions de convergence simple et uniforme. La trigonométrie, les nombres complexes et les espaces vectoriels munis d'un produit scalaire sont également utiles. Une première familiarité avec les espaces L^2 et la convergence quadratique facilite la compréhension des résultats les plus généraux.

Objectifs. L'objectif est de comprendre comment représenter une fonction périodique comme une somme de fonctions trigonométriques. On introduira les coefficients de Fourier, on établira leur calcul dans des exemples classiques et on présentera les principaux théorèmes de convergence. On distinguera soigneusement la convergence ponctuelle, la convergence uniforme et la convergence dans L^2. Enfin, on étudiera quelques applications au calcul de sommes numériques et à la résolution de problèmes issus de la physique.

2 Introduction et motivation

Les séries de Fourier constituent un outil fondamental pour l'étude des phénomènes périodiques. Elles permettent de décomposer une fonction en une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences différentes.

Cette décomposition intervient notamment dans l'analyse des signaux, l'étude des vibrations, la propagation de la chaleur et la résolution de certaines équations différentielles.

L'idée fondamentale consiste à chercher une représentation de la forme

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right),$$

pour une fonction 2π-périodique.

Deux questions se posent alors :

— Comment déterminer les coefficients a_n et b_n ?

— Dans quel sens la série obtenue converge-t-elle vers f ?

La seconde question est essentielle : une série de Fourier n'est pas nécessairement convergente en tout point, ni uniformément convergente.

3 Coefficients de Fourier

3.1 Orthogonalité des fonctions trigonométriques

Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, les fonctions trigonométriques sont orthogonales pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Pour $n, m \geq 1$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m, \end{cases}$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

De plus,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Enfin,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\ \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\ \mathrm{d}x = 0 \qquad (n \geq 1).$$

Ces relations expliquent pourquoi les coefficients de Fourier peuvent être obtenus par intégration.

3.2 Définition des coefficients réels

Définition 3.1. Soit f une fonction 2π-périodique, intégrable sur $[-\pi, \pi]$. Ses coefficients de Fourier réels sont

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x,$$

et, pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x.$$

La série de Fourier associée à f est

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right),$$

lorsque cette série converge. L'écriture $f \sim S_f$ ne signifie pas, à elle seule, que la série converge partout vers f.

3.3 Cas des fonctions paires et impaires

Si f est paire, alors $f(x)\sin(nx)$ est impaire, d'où

$$b_n = 0.$$

On obtient

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x.$$

Si f est impaire, alors

$$a_0 = a_n = 0,$$

et

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x.$$

Ces simplifications sont particulièrement utiles dans les calculs explicites.

3.4 Forme complexe

On peut également écrire la série de Fourier sous forme complexe :

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\ \mathrm{d}x.$$

Pour une fonction réelle,

$$c_{-n} = \overline{c_n},$$

et les deux écritures sont équivalentes puisque

$$a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) \quad (n \geq 1),$$

et $a_0 = 2c_0$.

La forme complexe est souvent plus adaptée aux calculs théoriques, tandis que la forme réelle met en évidence les composantes sinusoïdales.

4 Calcul de séries de Fourier : exemples

4.1 Exemple 1 : la fonction $f(x) = x$

On considère sur $]-\pi, \pi[$ la fonction $f(x) = x$, prolongée périodiquement.

Cette fonction est impaire : tous les coefficients a_n sont nuls. Pour $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx)\ \mathrm{d}x.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_0^\pi x \sin(nx)\ \mathrm{d}x = -\frac{\pi(-1)^n}{n}.$$

Ainsi,

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

La série de Fourier est donc

$$\boxed{x \sim 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).}$$

Aux points $x \in]-\pi, \pi[$, la série converge vers x. Aux points de discontinuité du prolongement périodique, notamment en $x = \pi$ et $x = -\pi$, elle converge vers la moyenne des limites latérales, soit 0.

4.2 Exemple 2 : la fonction $f(x) = x^2$

La fonction $x \mapsto x^2$ est paire. On a donc $b_n = 0$ et

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\ \mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx)\ \mathrm{d}x.$$

Deux intégrations par parties conduisent à

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

La série de Fourier est

$$\boxed{x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).}$$

Le prolongement périodique de x^2 est continu. Comme les coefficients sont de l'ordre de $1/n^2$, la série converge absolument et uniformément.

En évaluant en $x = \pi$, on obtient

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

4.3 Exemple 3 : une fonction créneau

Considérons la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Les valeurs aux points de discontinuité n'affectent pas les coefficients de Fourier.

Cette fonction est impaire. On a

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi n}(1 - (-1)^n).$$

Ainsi,

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n} & \text{si } n \text{ est impair}, \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair}. \end{cases}$$

Sa série de Fourier est

$$\boxed{f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right).}$$

Aux points de continuité, la série converge vers $f(x)$. Aux points de saut, elle converge vers la moyenne des limites latérales, ici 0.

La présence de discontinuités empêche la convergence uniforme vers cette fonction créneau. Les oscillations proches des sauts illustrent le phénomène de Gibbs.

5 Convergence des séries de Fourier

5.1 Convergence ponctuelle : théorème de Dirichlet

Théorème 5.1 (Dirichlet, version classique)**.** *Soit f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux et de classe C^1 par morceaux sur une période. Alors sa série de Fourier converge en tout point x vers*

$$\boxed{\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.}$$

Aux points où f est continue, cette limite est $f(x)$.

Les hypothèses ci-dessus constituent un cadre classique suffisant. D'autres formulations du théorème utilisent notamment la variation bornée.

Remarque 5.2. Une fonction continue par morceaux peut posséder des sauts. La série de Fourier converge alors au saut vers la moyenne des deux limites latérales, et non nécessairement vers la valeur attribuée à la fonction en ce point.

5.2 Convergence uniforme

Proposition 5.3. *Si*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|)<+\infty,$$

alors la série de Fourier converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

Cette condition est suffisante, mais non nécessaire.

Par exemple, si f est de classe C^2 et 2π-périodique, avec les dérivées nécessaires raccordées aux extrémités, des intégrations par parties permettent d'obtenir $a_n, b_n = O(1/n^2)$. Les coefficients sont alors absolument sommables.

La continuité seule ne garantit cependant pas que la série de Fourier converge uniformément.

5.3 Convergence quadratique et espace L^2

On considère l'espace $L^2([-\pi,\pi])$ muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Les fonctions trigonométriques forment un système orthogonal complet dans cet espace.

Théorème 5.4 (Convergence dans L^2)**.** *Pour toute fonction $f\in L^2([-\pi,\pi])$, la suite des sommes partielles de Fourier converge vers f dans L^2 :*

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|S_N(f)(x)-f(x)|^2\,\mathrm{d}x=0.$$

Cette convergence est une convergence en moyenne quadratique. Elle n'implique pas, à elle seule, la convergence en chaque point.

5.4 Identité de Parseval

Théorème 5.5 (Parseval)**.** *Si $f\in L^2([-\pi,\pi])$ et si a_n, b_n désignent ses coefficients de Fourier réels, alors*

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)}$$

pour une fonction réelle.

Cette identité exprime la conservation de l'énergie lors de la décomposition en composantes trigonométriques. Elle permet aussi de calculer des sommes de séries numériques.

Pour $f(x)=x^2$, on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi^5}{5}=\frac{2\pi^4}{5}.$$

Comme $a_0=2\pi^2/3$, $a_n=4(-1)^n/n^2$ et $b_n=0$, Parseval donne

$$\frac{2\pi^4}{5}=\frac{2\pi^4}{9}+16\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.}$$

6 Applications

6.1 Calcul de sommes numériques

Les séries de Fourier permettent de déterminer des sommes telles que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4},$$

en évaluant une série en un point ou en appliquant l'identité de Parseval.

Il faut cependant justifier la convergence et le choix du point d'évaluation.

6.2 Analyse des signaux périodiques

Une fonction périodique peut être interprétée comme une superposition de fréquences. Les coefficients de Fourier mesurent la contribution de chaque fréquence.

Cette approche intervient dans le traitement du signal, l'acoustique, l'étude des vibrations et l'analyse des phénomènes périodiques.

6.3 Équation de la chaleur

Considérons l'équation de la chaleur sur un intervalle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

avec des conditions aux limites homogènes

$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

La méthode de séparation des variables conduit aux fonctions propres

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n \geq 1.$$

Pour une donnée initiale suffisamment régulière, ou dans un cadre L^2 plus général, la solution s'écrit

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\kappa \frac{n^2\pi^2}{L^2} t\right),$$

où les coefficients b_n sont ceux du développement en série de Fourier sinus de la donnée initiale.

Les hautes fréquences décroissent plus rapidement, ce qui explique le lissage progressif de la solution.

7 Points de vigilance pour l'oral

Lors de la présentation, il convient de distinguer les notions suivantes :

- les coefficients de Fourier, définis par des intégrales ;
- la série formelle associée à ces coefficients ;
- la convergence ponctuelle vers la valeur de la fonction ou vers la moyenne des limites latérales ;
- la convergence uniforme, plus exigeante ;
- la convergence dans L^2, qui concerne une norme intégrale.

Il faut également préciser le domaine de périodicité et la convention utilisée pour les coefficients, en particulier le facteur $1/2$ devant a_0.

Les valeurs d'une fonction en un nombre fini de points ne modifient pas ses coefficients de Fourier. En revanche, elles peuvent modifier l'énoncé d'une convergence ponctuelle si elles diffèrent de la limite de la série.

Enfin, le phénomène de Gibbs ne signifie pas que la série diverge partout : il décrit le comportement des sommes partielles près d'une discontinuité.

8 Liste d'exercices

Les exercices suivants peuvent servir à la préparation de l'oral, à des questions complémentaires ou à une séance d'approfondissement.

Exercice 1. Coefficients de Fourier.
Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. Établir sa série de Fourier et préciser son comportement aux points de raccordement.

Exercice 2. Fonction polynomiale périodisée.
Déterminer la série de Fourier de $f(x) = x^3$ sur $]-\pi, \pi[$, prolongée périodiquement. On pourra utiliser la parité puis des intégrations par parties. Préciser les valeurs de convergence aux points de saut.

Exercice 3. Série de Fourier d'une fonction constante par morceaux.
Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Calculer ses coefficients, puis déterminer la limite de sa série de Fourier aux points 0 et π.

Exercice 4. Somme de la série des inverses des carrés.
À partir du développement de x^2, retrouver

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Indiquer précisément pourquoi l'évaluation en $x = \pi$ est licite.

Exercice 5. Identité de Parseval.
Appliquer Parseval à la fonction $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi]$ pour retrouver une valeur de $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$.

Exercice 6. Convergence uniforme.
Montrer que si les coefficients vérifient

$$|a_n| + |b_n| \leq \frac{C}{n^2},$$

pour une constante $C > 0$, alors la série de Fourier converge normalement. En déduire la continuité de sa somme.

Exercice 7. Symétries.
Montrer comment la parité d'une fonction permet de réduire le calcul des coefficients de Fourier à une intégrale sur $[0, \pi]$. Donner un exemple pair et un exemple impair.

Exercice 8. Forme complexe.
Établir les relations entre les coefficients réels a_n, b_n et les coefficients complexes c_n. Les vérifier pour la fonction $f(x) = x$.

Exercice 9. Phénomène de Gibbs.

Étudier les sommes partielles de la série de Fourier de la fonction créneau. Décrire le comportement près d'un saut et expliquer pourquoi la convergence uniforme échoue.

Exercice 10. Équation de la chaleur.

Résoudre l'équation de la chaleur sur $[0, L]$ avec des conditions aux limites homogènes et une donnée initiale $f(x) = x(L-x)$. Déterminer les coefficients de la série sinus et discuter la convergence de la solution.

9 Conclusion

Les séries de Fourier fournissent une décomposition trigonométrique des fonctions périodiques. Le calcul des coefficients repose sur l'orthogonalité des fonctions trigonométriques. Les théorèmes de convergence permettent ensuite de donner un sens précis à la représentation obtenue.

Trois résultats structurent la leçon :

— le théorème de Dirichlet, qui décrit la convergence ponctuelle dans un cadre classique ;

— la convergence dans L^2, liée à la complétude du système trigonométrique ;

— l'identité de Parseval, qui relie l'intégrale du carré d'une fonction à ses coefficients de Fourier.

Ces résultats expliquent à la fois la puissance de la méthode et les précautions nécessaires lorsqu'on passe d'une série formelle à une représentation effective d'une fonction.

Références

[1] X. Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses, Paris. Ouvrage de référence pour les séries numériques, les intégrales et les notions de convergence.

[2] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3e édition, McGraw-Hill, 1976. Référence générale pour l'analyse réelle et les questions de convergence.

[3] E. M. Stein et R. Shakarchi, *Fourier Analysis : An Introduction*, Princeton University Press, 2003. Présentation approfondie des séries de Fourier, des coefficients et des théorèmes de convergence.

[4] C. Zuili et D. Queffélec, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod. Ouvrage de préparation à l'agrégation et d'approfondissement des outils d'analyse.

[5] H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann. Référence complémentaire pour les outils d'analyse nécessaires à la compréhension de la leçon.

[6] Walter Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, traduction française de l'ouvrage *Real and Complex Analysis*. Référence pour les espaces L^p et les fondements de l'analyse de Fourier.