Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Transformation de Laplace

Table des matières

1 Introduction : motivation et cadre général **2**
1.1 Prérequis et objectifs . . . 2

2 Définition et existence **2**
2.1 Définition . . . 2
2.2 Ordre exponentiel . . . 2
2.3 Premiers exemples . . . 3

3 Propriétés fondamentales **3**
3.1 Linéarité . . . 3
3.2 Transformée d'une dérivée . . . 4
3.3 Multiplication par une exponentielle . . . 4
3.4 Multiplication par une puissance de t . . . 4
3.5 Changement d'échelle . . . 4
3.6 Transformée d'une intégrale . . . 4
3.7 Fonctions périodiques . . . 5

4 Table de transformées usuelles **5**

5 Convolution et produit de transformées **5**
5.1 Définition de la convolution . . . 5

6 Transformée inverse et unicité **6**
6.1 Principe d'inversion . . . 6
6.2 Unicité . . . 6
6.3 Fractions rationnelles . . . 6

7 Application aux équations différentielles **6**
7.1 Équation différentielle du premier ordre . . . 6
7.2 Exemple détaillé . . . 7
7.3 Équation différentielle du second ordre . . . 7
7.4 Exemple : oscillateur harmonique . . . 7

8 Échelon et impulsion : ouverture vers les systèmes **8**
8.1 Fonction échelon . . . 8
8.2 Impulsion de Dirac . . . 8

9 Limites et précautions **8**

10 Liste d'exercices **8**

11 Conclusion **10**

1 Introduction : motivation et cadre général

La transformation de Laplace est un outil d'analyse qui associe à une fonction du temps une fonction d'une variable complexe, appelée variable de Laplace. Elle permet notamment de transformer certaines équations différentielles en équations algébriques.

Elle intervient dans l'étude des systèmes linéaires, des circuits électriques, des phénomènes mécaniques et de nombreux problèmes d'évolution. Son intérêt repose sur trois idées :

— transformer une dérivation en une multiplication par la variable de Laplace, avec prise en compte des conditions initiales ;

— exploiter des propriétés algébriques pour calculer des solutions ;

— reconstruire, sous des hypothèses appropriées, la fonction initiale à partir de sa transformée.

La leçon sera principalement consacrée à la transformation de Laplace unilatérale, adaptée aux problèmes posés pour $t \geq 0$.

1.1 Prérequis et objectifs

Prérequis. Les notions nécessaires sont les intégrales impropres, la convergence absolue, les fonctions exponentielles et trigonométriques, les équations différentielles linéaires à coefficients constants, ainsi que les bases du calcul intégral et de l'intégration par parties. Une familiarité avec les fonctions complexes est utile pour aborder le cadre général, mais les premiers exemples peuvent être traités avec une variable réelle.

Objectifs. À l'issue de cette leçon, on doit savoir définir la transformation de Laplace et préciser les conditions de son existence, calculer des transformées usuelles, établir et utiliser les principales propriétés de calcul, résoudre des équations différentielles linéaires avec conditions initiales et interpréter les résultats. Il convient également de connaître les limites de la méthode, notamment la nécessité de justifier les hypothèses de convergence et les conditions d'inversion.

2 Définition et existence

2.1 Définition

Définition 2.1. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable. Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale converge, on appelle transformée de Laplace de f la fonction

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note également $F = \mathcal{L}(f)$.

Lorsque $s = \sigma + i\omega$, le facteur exponentiel s'écrit

$$\mathrm{e}^{-st} = \mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-i\omega t}.$$

La partie réelle σ contrôle donc la décroissance exponentielle, tandis que la partie imaginaire ω intervient dans les oscillations.

2.2 Ordre exponentiel

Définition 2.2. Une fonction f est dite d'ordre exponentiel $a \in \mathbb{R}$ si, à partir d'un certain rang, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{at}.$$

Proposition 2.3. *Si f est localement intégrable et d'ordre exponentiel a, alors sa transformée de Laplace existe absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > a$, sous réserve de l'intégrabilité locale de f.*

Démonstration. Pour t assez grand,

$$|\mathrm{e}^{-st} f(t)| \leq M \mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}(s)-a)t}.$$

Si $\mathrm{Re}(s) > a$, le majorant est intégrable sur un intervalle de la forme $[T, +\infty[$. Sur $[0, T]$, l'intégrabilité locale de f assure la convergence. □

Remarque 2.4. L'ordre exponentiel fournit une condition suffisante d'existence, et non une condition nécessaire. Certaines fonctions dont la croissance n'est pas bornée par une exponentielle peuvent néanmoins posséder une transformée de Laplace dans un domaine non vide.

2.3 Premiers exemples

Exemple 2.5 (Transformée d'une constante)**.** Pour $f(t) = 1$, si $\mathrm{Re}(s) > 0$,

$$\mathcal{L}(1)(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{s}.$$

Exemple 2.6 (Exponentielle)**.** Pour $f(t) = \mathrm{e}^{at}$, on obtient

$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{at})(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s-a)t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{s-a},$$

pour $\mathrm{Re}(s) > a$.

Exemple 2.7 (Fonctions trigonométriques)**.** Pour $\mathrm{Re}(s) > 0$,

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t))(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

et

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t))(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

3 Propriétés fondamentales

Dans cette section, les propriétés sont énoncées sous des hypothèses suffisantes de convergence. Les calculs formels doivent toujours être accompagnés d'une vérification de ces hypothèses dans les applications.

3.1 Linéarité

Proposition 3.1. *Si $\mathcal{L}(f) = F$ et $\mathcal{L}(g) = G$ existent dans un domaine commun, alors, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,*

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha F + \beta G.$$

Cette propriété permet de calculer la transformée d'une combinaison linéaire à partir des transformées connues.

3.2 Transformée d'une dérivée

Proposition 3.2. *Supposons f localement absolument continue, que f' soit localement intégrable, et que les conditions de croissance permettent les intégrations par parties et l'annulation du terme à l'infini. Alors*

$$\mathcal{L}(f')(s) = sF(s) - f(0).$$

Plus généralement, si les hypothèses analogues sont satisfaites,

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0).$$

Démonstration. Pour la première formule, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\mathrm{e}^{-st} f(t)\right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -f(0) + sF(s).\end{aligned}$$

La formule générale s'obtient par récurrence. □

Remarque 3.3. La prise en compte des valeurs initiales est fondamentale : elle explique l'intérêt de la transformation de Laplace pour les problèmes de Cauchy.

3.3 Multiplication par une exponentielle

Si $F = \mathcal{L}(f)$, alors

$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{at} f(t))(s) = F(s-a),$$

dans le domaine où les intégrales convergent.

3.4 Multiplication par une puissance de t

Sous des hypothèses permettant la dérivation sous le signe intégral,

$$F'(s) = -\mathcal{L}(tf(t))(s).$$

Plus généralement,

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t))(s).$$

3.5 Changement d'échelle

Pour $a > 0$,

$$\mathcal{L}(f(at))(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

3.6 Transformée d'une intégrale

Si $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$, alors, sous les conditions usuelles de convergence,

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{F(s)}{s}.$$

3.7 Fonctions périodiques

Soit f une fonction périodique de période $T > 0$, localement intégrable sur $[0, +\infty[$. Lorsque $\mathrm{Re}(s) > 0$, on a

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{\displaystyle\int_0^T \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t}{1 - \mathrm{e}^{-sT}},$$

pour les valeurs de s où le dénominateur ne s'annule pas.

Cette formule découle de la décomposition de l'intégrale sur les intervalles $[kT, (k+1)T]$ et de la sommation d'une série géométrique.

4 Table de transformées usuelles

Les formules suivantes sont données avec leurs domaines de convergence usuels.

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$	Condition
1	$\dfrac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}(s) > a$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$\mathrm{e}^{at}\cos(\omega t)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(s) > a$
$\mathrm{e}^{at}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(s) > a$

La formule

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

se démontre par récurrence en utilisant une intégration par parties, pour tout entier $n \geq 0$ et $\mathrm{Re}(s) > 0$.

5 Convolution et produit de transformées

5.1 Définition de la convolution

Définition 5.1. Pour deux fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$, on définit, lorsque l'intégrale existe, leur convolution par

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u) g(t-u)\,\mathrm{d}u.$$

Proposition 5.2 (Théorème de convolution)**.** *Sous des hypothèses assurant la convergence des intégrales et permettant l'application de Fubini,*

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s).$$

Idée de la démonstration. On écrit

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} \int_0^t f(u) g(t-u)\,\mathrm{d}u\;\mathrm{d}t.$$

En échangeant les intégrales puis en posant $v = t - u$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u \int_0^{+\infty} g(v)\mathrm{e}^{-sv}\,\mathrm{d}v \\ &= \mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s).\end{aligned}$$

□

La convolution permet notamment de représenter la réponse d'un système linéaire invariant dans le temps à partir de sa réponse impulsionnelle et du signal d'entrée.

6 Transformée inverse et unicité

6.1 Principe d'inversion

La transformation de Laplace permet de passer de f à F. Dans les applications, on cherche souvent à retrouver f à partir de F.

On note formellement

$$f = \mathcal{L}^{-1}(F).$$

Il ne s'agit pas d'une formule de calcul à elle seule : l'existence de l'inverse et les conditions d'inversion doivent être justifiées.

6.2 Unicité

Théorème 6.1 (Principe d'unicité)**.** *Dans les classes usuelles de fonctions localement intégrables et d'ordre exponentiel, si deux fonctions ont la même transformée de Laplace dans un demi-plan où elle existe, elles sont égales presque partout. Si elles sont continues, elles sont égales en tout point.*

Ce résultat justifie l'identification des fonctions à partir de leurs transformées, sous réserve des hypothèses du théorème.

6.3 Fractions rationnelles

Dans les problèmes élémentaires, l'inversion repose souvent sur la décomposition en éléments simples et sur la table des transformées usuelles.

Par exemple,

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}.$$

On en déduit

$$f(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}.$$

Une autre technique consiste à compléter le carré dans les dénominateurs quadratiques afin de retrouver les transformées du sinus et du cosinus.

7 Application aux équations différentielles

7.1 Équation différentielle du premier ordre

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + ay(t) = g(t), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

En posant $Y = \mathcal{L}(y)$ et $G = \mathcal{L}(g)$, la propriété de dérivation donne

$$sY(s) - y_0 + aY(s) = G(s).$$

Ainsi,

$$Y(s) = \frac{G(s) + y_0}{s + a}.$$

On cherche ensuite à déterminer y par inversion.

7.2 Exemple détaillé

Résolvons

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

La transformation de Laplace conduit à

$$sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Donc

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}.$$

Par inversion,

$$\boxed{y(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}}.$$

On vérifie directement que $y(0) = 0$ et que $y'(t) + y(t) = 1$.

7.3 Équation différentielle du second ordre

Considérons

$$\begin{cases} y'' + \omega_0^2 y = g(t), \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0. \end{cases}$$

La transformation donne

$$s^2 Y(s) - sy_0 - v_0 + \omega_0^2 Y(s) = G(s),$$

d'où

$$Y(s) = \frac{G(s) + sy_0 + v_0}{s^2 + \omega_0^2}.$$

La décomposition de cette expression permet de retrouver la solution en fonction du second membre et des conditions initiales.

7.4 Exemple : oscillateur harmonique

Résolvons

$$\begin{cases} y'' + \omega_0^2 y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \end{cases} \qquad \omega_0 > 0.$$

En notant $Y = \mathcal{L}(y)$, on obtient

$$(s^2 + \omega_0^2) Y(s) = s.$$

Ainsi,

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2},$$

et par inversion,

$$\boxed{y(t) = \cos(\omega_0 t)}.$$

8 Échelon et impulsion : ouverture vers les systèmes

8.1 Fonction échelon

Pour $a \geq 0$, on définit l'échelon unité retardé par

$$H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$$

Sa transformée vaut

$$\mathcal{L}(H(t-a))(s) = \frac{\mathrm{e}^{-as}}{s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Plus généralement, si $F = \mathcal{L}(f)$,

$$\mathcal{L}\big(H(t-a)f(t-a)\big)(s) = \mathrm{e}^{-as}F(s).$$

Cette propriété permet de modéliser un signal qui commence à un instant donné.

8.2 Impulsion de Dirac

La distribution de Dirac δ_0 n'est pas une fonction ordinaire. Dans le cadre de la théorie des distributions, on écrit formellement

$$\mathcal{L}(\delta_0)(s) = 1.$$

De même, pour une impulsion retardée,

$$\mathcal{L}(\delta(t-a))(s) = \mathrm{e}^{-as}.$$

Ces relations sont utiles en automatique et en traitement du signal, mais nécessitent un cadre théorique adapté si l'on veut les justifier rigoureusement.

9 Limites et précautions

La transformation de Laplace ne s'applique pas sans conditions à toutes les fonctions. Il faut notamment :

— vérifier la convergence de l'intégrale définissant la transformée ;

— préciser le domaine de convergence ;

— justifier les dérivations sous le signe intégral et les intégrations par parties ;

— contrôler les hypothèses des théorèmes de convolution et d'inversion ;

— distinguer les fonctions ordinaires des distributions lorsqu'on utilise l'impulsion de Dirac.

Enfin, la méthode est particulièrement adaptée aux équations linéaires à coefficients constants et aux données initiales en un instant. Elle ne résout pas automatiquement les équations non linéaires ni les problèmes pour lesquels l'inversion de la transformée est difficile.

10 Liste d'exercices

Les exercices suivants permettent de vérifier les calculs, les propriétés et les applications de la transformation de Laplace.

Exercice 1 – Calculs directs

Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes et préciser leur domaine de convergence :

$$f_1(t) = t^2, \qquad f_2(t) = \mathrm{e}^{-3t}, \qquad f_3(t) = \sin(2t), \qquad f_4(t) = t\mathrm{e}^{2t}.$$

Exercice 2 – Propriétés de calcul

Soit $F = \mathcal{L}(f)$. Établir, sous des hypothèses suffisantes, les formules

$$\mathcal{L}(f')(s) = sF(s) - f(0)$$

et

$$\mathcal{L}(tf(t))(s) = -F'(s).$$

Les appliquer à $f(t) = \mathrm{e}^{at}\cos(\omega t)$.

Exercice 3 – Équation différentielle du premier ordre

Résoudre par transformation de Laplace :

$$\begin{cases} y' + 2y = \mathrm{e}^{-t}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Comparer le résultat avec celui obtenu par la méthode du facteur intégrant.

Exercice 4 – Équation différentielle du second ordre

Résoudre

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Effectuer la décomposition en éléments simples de $Y(s)$.

Exercice 5 – Second membre sinusoïdal

Résoudre

$$\begin{cases} y'' + y = \sin(2t), \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Vérifier la solution par substitution dans l'équation.

Exercice 6 – Convolution

Calculer la convolution de

$$f(t) = 1, \qquad g(t) = \mathrm{e}^{-t}.$$

Vérifier que la transformée du résultat est le produit des transformées de f et de g.

Exercice 7 – Fonction périodique

Soit f la fonction périodique de période 2 définie sur $[0, 2[$ par

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < 2. \end{cases}$$

Calculer $\mathcal{L}(f)(s)$ à l'aide de la formule des fonctions périodiques.

Exercice 8 – Échelon retardé

Calculer la transformée de

$$f(t) = H(t-2)(t-2)^2.$$

En déduire une méthode pour traiter une équation différentielle dont le second membre est retardé.

Exercice 9 – Oscillateur amorti

Résoudre par transformation de Laplace :

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Interpréter l'allure de la solution.

Exercice 10 – Problème de synthèse

On considère le système

$$y'(t) + ay(t) = u(t), \qquad y(0) = 0, \quad a > 0.$$

a) Déterminer la transformée $Y(s)$ en fonction de $U(s)$.

b) Dans le cas $u(t) = 1$, calculer $y(t)$.

c) Dans le cas $u(t) = \mathrm{e}^{-bt}$, avec $b \neq a$, calculer $y(t)$.

d) Relier la solution à la convolution et commenter le rôle du paramètre a.

11 Conclusion

La transformation de Laplace est une méthode efficace pour l'étude des équations différentielles linéaires. Elle associe à la dérivation une opération algébrique, tout en intégrant les conditions initiales dans le calcul.

La démarche essentielle consiste à vérifier l'existence de la transformée, à utiliser les propriétés de calcul, à résoudre l'équation obtenue dans le domaine de Laplace, puis à effectuer l'inversion et à contrôler le résultat.

Les prolongements naturels sont la théorie des systèmes linéaires, les fonctions de transfert, le traitement du signal et l'étude des équations différentielles avec retards.

Références

[1] G. Doetsch, *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*, Springer, 1974.

[2] D. V. Widder, *The Laplace Transform*, Princeton University Press, 1941.

[3] L. Debnath et D. Bhatta, *Integral Transforms and Their Applications*, 3e édition, Chapman & Hall/CRC, 2015.

[4] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, 3e édition, McGraw-Hill, 2000.

[5] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, éditions françaises disponibles.