Courbes de Bézier

Leçon pour l'oral du CAPES de mathématiques

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**

2 Construction des courbes de Bézier **2**
- 2.1 Polynômes de Bernstein . . . 2
- 2.2 Définition d'une courbe de Bézier . . . 3
- 2.3 Cas particuliers . . . 3
  - 2.3.1 Degré un : segment . . . 3
  - 2.3.2 Degré deux : courbe quadratique . . . 3
  - 2.3.3 Degré trois : courbe cubique . . . 3

3 Propriétés géométriques fondamentales **4**
- 3.1 Passage par les extrémités . . . 4
- 3.2 Dérivée et tangentes aux extrémités . . . 4
- 3.3 Propriété d'enveloppe convexe . . . 4
- 3.4 Invariance affine . . . 5
- 3.5 Variation du degré . . . 5

4 L'algorithme de De Casteljau **5**
- 4.1 Construction récursive . . . 5
- 4.2 Justification . . . 5
- 4.3 Exemple pour une courbe quadratique . . . 6
- 4.4 Intérêts pratiques . . . 6

5 Raccordement de courbes de Bézier **6**
- 5.1 Continuité géométrique et continuité paramétrique . . . 6

6 Applications et limites **7**
- 6.1 Applications . . . 7
- 6.2 Limites . . . 7

7 Exemple de synthèse **7**

8 Exercices **8**

9 Questions possibles du jury **9**

10 Conclusion **9**

1 Prérequis et objectifs

Prérequis

Cette leçon mobilise les notions suivantes :

— calcul polynomial et dérivation ;

— géométrie affine et combinaison barycentrique ;

— vecteurs du plan et de l'espace ;

— suites et sommes finies ;

— convexité et propriétés élémentaires des fonctions ;

— représentation paramétrique d'une courbe.

Des connaissances sur les polynômes de Bernstein, les interpolations polynomiales et les applications de la géométrie à la conception assistée par ordinateur peuvent enrichir la présentation, sans être indispensables.

Objectifs

L'objectif principal est de comprendre comment une famille finie de points de contrôle permet de construire une courbe paramétrée possédant des propriétés géométriques intéressantes.

À l'issue de la leçon, on doit savoir :

— définir les polynômes de Bernstein et les courbes de Bézier ;

— établir les propriétés fondamentales de ces courbes ;

— calculer leurs points et leurs vecteurs tangents aux extrémités ;

— démontrer leur invariance par transformation affine ;

— expliquer l'algorithme de De Casteljau ;

— présenter des applications et discuter les limites du modèle.

2 Construction des courbes de Bézier

2.1 Polynômes de Bernstein

Définition 2.1. Pour un entier $n \geq 0$, les polynômes de Bernstein de degré n sont définis, pour $t \in [0,1]$, par

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \qquad 0 \leq i \leq n.$$

Ils vérifient plusieurs propriétés fondamentales.

Propriété 2.2 (Positivité)**.** *Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $i \in \{0, \dots, n\}$,*

$$B_{i,n}(t) \geq 0.$$

Propriété 2.3 (Partition de l'unité)**.** *Pour tout $t \in [0,1]$,*

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1.$$

Démonstration. Par la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = (t + (1-t))^n = 1.$$

□

Aux extrémités, on a

$$B_{0,n}(0) = 1, \qquad B_{i,n}(0) = 0 \quad (i \neq 0),$$

et

$$B_{n,n}(1) = 1, \qquad B_{i,n}(1) = 0 \quad (i \neq n).$$

Ces identités expliquent pourquoi les courbes de Bézier passent par leurs premier et dernier points de contrôle.

2.2 Définition d'une courbe de Bézier

Soient $P_0, \ldots, P_n$ des points de $\mathbb{R}^d$, où $d = 2$ ou $d = 3$.

Définition 2.4. La courbe de Bézier de degré n associée aux points de contrôle $P_0, \ldots, P_n$ est la courbe paramétrée

$$\boxed{C(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) P_i, \qquad t \in [0,1].}$$

Les points $P_0, \ldots, P_n$ constituent le polygone de contrôle.

Dans le plan, si $P_i = (x_i, y_i)$, alors

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) x_i, \qquad y(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) y_i.$$

La courbe est donc polynomiale et de degré inférieur ou égal à n.

2.3 Cas particuliers

2.3.1 Degré un : segment

Pour deux points P_0 et P_1,

$$C(t) = (1-t)P_0 + tP_1.$$

La courbe décrit le segment $[P_0, P_1]$.

2.3.2 Degré deux : courbe quadratique

Pour trois points P_0, P_1, P_2,

$$\boxed{C(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2.}$$

Le point P_1 attire la courbe sans appartenir nécessairement à celle-ci.

2.3.3 Degré trois : courbe cubique

Pour quatre points P_0, P_1, P_2, P_3,

$$\begin{aligned} C(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 \\ + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3. \end{aligned}$$

Les courbes cubiques sont particulièrement utilisées en infographie vectorielle, notamment parce qu'elles permettent de régler indépendamment les directions tangentes aux extrémités.

3 Propriétés géométriques fondamentales

3.1 Passage par les extrémités

Propriété 3.1. *Toute courbe de Bézier vérifie*

$$C(0) = P_0, \qquad C(1) = P_n.$$

Démonstration. Pour $t = 0$, tous les coefficients de Bernstein sont nuls, sauf $B_{0,n}(0) = 1$. Ainsi $C(0) = P_0$. Le raisonnement en $t = 1$ donne $C(1) = P_n$. □

3.2 Dérivée et tangentes aux extrémités

Propriété 3.2. *La dérivée d'une courbe de Bézier s'écrit*

$$\boxed{C'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)(P_{i+1} - P_i).}$$

En particulier,

$$\boxed{C'(0) = n(P_1 - P_0)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{C'(1) = n(P_n - P_{n-1}).}$$

Démonstration. On utilise l'identité

$$B'_{i,n}(t) = n(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)),$$

en convenant que les coefficients hors de leur plage d'indices sont nuls.

En dérivant la définition de C, puis en regroupant les termes, on obtient

$$\begin{aligned} C'(t) &= \sum_{i=0}^{n} B'_{i,n}(t) P_i \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)(P_{i+1} - P_i). \end{aligned}$$

Les formules aux extrémités résultent des valeurs des polynômes de Bernstein en 0 et en 1. □

La tangente au départ, lorsqu'elle est définie, a donc pour direction $(P_1 - P_0)$; celle à l'arrivée a pour direction $(P_n - P_{n-1})$.

Remarque 3.3. Si deux points de contrôle consécutifs sont confondus, la dérivée à l'extrémité correspondante peut être nulle. La direction de la tangente doit alors être étudiée à partir des premières dérivées non nulles.

3.3 Propriété d'enveloppe convexe

Théorème 3.4. *La courbe de Bézier est contenue dans l'enveloppe convexe de ses points de contrôle :*

$$\boxed{C([0,1]) \subset \mathrm{Conv}\{P_0, \ldots, P_n\}.}$$

Démonstration. Pour chaque $t \in [0,1]$, les coefficients $B_{i,n}(t)$ sont positifs et leur somme vaut 1.

Ainsi $C(t)$ est une combinaison convexe des points $P_0, \ldots, P_n$. Par définition de l'enveloppe convexe, le résultat suit. □

Remarque 3.5. Cette propriété fournit un contrôle géométrique simple : la courbe ne peut pas sortir de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle. Elle ne signifie pas que la courbe remplit cette enveloppe.

3.4 Invariance affine

Propriété 3.6. *Soit $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ une application affine. Si C est la courbe de Bézier de points de contrôle $P_0, \ldots, P_n$, alors $A \circ C$ est la courbe de Bézier de points de contrôle $A(P_0), \ldots, A(P_n)$.*

Démonstration. Une application affine préserve les combinaisons affines. Puisque la somme des coefficients de Bernstein vaut 1,

$$\begin{aligned} A(C(t)) &= A\left(\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) P_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) A(P_i). \end{aligned}$$

C'est la représentation d'une courbe de Bézier associée aux points transformés. □

Les translations, rotations, homothéties et projections affines se traitent donc directement sur le polygone de contrôle.

3.5 Variation du degré

Propriété 3.7. *Une courbe de Bézier de degré n est une courbe polynomiale de degré au plus n. Son degré effectif peut être inférieur à n.*

Il est possible d'augmenter le degré d'une représentation sans modifier la courbe géométrique. En revanche, réduire le degré tout en conservant exactement la même courbe n'est pas toujours possible.

Pour une courbe de degré n, la dérivée est une courbe polynomiale de degré au plus $n-1$, exprimée à partir des différences successives des points de contrôle.

4 L'algorithme de De Casteljau

4.1 Construction récursive

L'algorithme de De Casteljau permet de calculer $C(t)$ par une succession d'interpolations affines.

Pour un paramètre fixé $t \in [0,1]$, on pose

$$P_i^{(0)} = P_i, \qquad 0 \le i \le n,$$

puis

$$\boxed{P_i^{(r)}(t) = (1-t) P_i^{(r-1)}(t) + t P_{i+1}^{(r-1)}(t),}$$

pour $1 \le r \le n$ et $0 \le i \le n-r$.

Le dernier point obtenu est

$$\boxed{C(t) = P_0^{(n)}(t).}$$

4.2 Justification

Théorème 4.1. *La construction récursive précédente donne le point de la courbe de Bézier de paramètre t.*

Démonstration. On démontre par récurrence sur r que

$$P_i^{(r)}(t) = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (1-t)^{r-j} t^j P_{i+j}.$$

Pour $r = 0$, l'identité est immédiate.

En supposant la formule vraie au rang $r-1$, on applique la relation de récurrence et on regroupe les coefficients à l'aide de l'identité de Pascal

$$\binom{r-1}{j} + \binom{r-1}{j-1} = \binom{r}{j}.$$

La formule en découle. Au rang n et pour $i = 0$, on retrouve exactement la définition de $C(t)$. □

4.3 Exemple pour une courbe quadratique

Pour trois points P_0, P_1, P_2, on calcule

$$\begin{aligned} P_0^{(1)} &= (1-t)P_0 + tP_1, \\ P_1^{(1)} &= (1-t)P_1 + tP_2, \\ P_0^{(2)} &= (1-t)P_0^{(1)} + tP_1^{(1)}. \end{aligned}$$

En développant la dernière expression, on obtient

$$P_0^{(2)} = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 = C(t).$$

4.4 Intérêts pratiques

L'algorithme présente plusieurs avantages :

— il repose uniquement sur des interpolations affines ;

— il est numériquement robuste ;

— il permet de calculer un point de la courbe ;

— il permet de subdiviser la courbe en deux morceaux de Bézier ;

— il fournit une construction géométrique concrète de la courbe.

La subdivision est utile lorsque l'on souhaite représenter une courbe par morceaux, ou calculer des approximations locales.

5 Raccordement de courbes de Bézier

Pour construire des courbes complexes, on raccorde souvent plusieurs arcs de Bézier.

Soient C_1 et C_2 deux courbes paramétrées sur $[0, 1]$, avec des points de contrôle respectifs

$$P_0, \dots, P_n \qquad \text{et} \qquad Q_0, \dots, Q_m.$$

5.1 Continuité géométrique et continuité paramétrique

— La continuité C^0 exige la coïncidence des points de raccordement :

$$P_n = Q_0.$$

— La continuité G^1 exige, lorsque les dérivées aux extrémités sont non nulles, que les vecteurs $P_n - P_{n-1}$ et $Q_1 - Q_0$ soient colinéaires et de même sens.

— La continuité C^1 exige en plus l'égalité des dérivées au raccordement, soit

$$n(P_n - P_{n-1}) = m(Q_1 - Q_0).$$

La continuité G^1 garantit un raccordement tangent, mais pas nécessairement une vitesse paramétrique continue. La continuité C^1 impose cette dernière condition.

Remarque 5.1. Ces conditions supposent que les arcs sont parcourus dans le sens de leurs paramètres croissants. Pour des raccordements plus généraux, il faut également préciser les orientations.

6 Applications et limites

6.1 Applications

Les courbes de Bézier interviennent notamment dans :

— le dessin vectoriel et la typographie ;

— la conception assistée par ordinateur (CAO) ;

— la modélisation géométrique en trois dimensions ;

— l'animation et les trajectoires paramétrées ;

— le tracé de formes dans les logiciels graphiques.

Le principe est de modifier les points de contrôle pour changer progressivement la forme de la courbe, sans avoir à calculer explicitement son équation cartésienne.

6.2 Limites

Les courbes de Bézier présentent aussi des limitations :

— le degré augmente avec le nombre de points de contrôle ;

— déplacer un point de contrôle influence en général toute la courbe ;

— une courbe de Bézier ne passe généralement pas par les points de contrôle intermédiaires ;

— certaines formes complexes sont plus faciles à représenter par plusieurs arcs de faible degré.

Pour obtenir un contrôle plus local, on peut utiliser des courbes de Bézier par morceaux ou des courbes B-splines, notamment les courbes NURBS.

7 Exemple de synthèse

Considérons les points

$$P_0 = (0,0), \qquad P_1 = (1,2), \qquad P_2 = (3,0).$$

La courbe quadratique associée est

$$C(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2.$$

Ses coordonnées sont

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= 2t(1-t) + 3t^2 = 2t + t^2, \\ y(t) &= 4t(1-t) = 4t - 4t^2, \end{aligned} \qquad t \in [0,1].}$$

Les extrémités sont

$$C(0) = (0,0), \qquad C(1) = (3,0).$$

La dérivée vaut

$$C'(t) = (2 + 2t,\, 4 - 8t).$$

Ainsi,

$$C'(0) = (2,4), \qquad C'(1) = (4,-4).$$

La courbe part de P_0 avec une direction parallèle à $P_1 - P_0$ et arrive en P_2 avec une direction parallèle à $P_2 - P_1$.

Enfin, elle est contenue dans le triangle de sommets P_0, P_1, P_2, d'après la propriété d'enveloppe convexe.

8 Exercices

Les exercices suivants peuvent servir de prolongements ou de questions de préparation à l'oral.

Exercice 8.1 (Courbe de degré un)**.** Soient P_0 et P_1 deux points du plan.

a) Écrire la courbe de Bézier associée.

b) Montrer que son image est le segment $[P_0, P_1]$.

c) Interpréter géométriquement le paramètre t.

Exercice 8.2 (Courbe quadratique)**.** On considère

$$P_0 = (0,0), \quad P_1 = (2,3), \quad P_2 = (4,0).$$

a) Déterminer les équations paramétriques de la courbe.

b) Calculer les tangentes aux extrémités.

c) Déterminer les coordonnées du point $C(1/2)$.

d) Vérifier la propriété d'enveloppe convexe.

Exercice 8.3 (Courbe cubique)**.** Soient

$$P_0 = (0,0), \quad P_1 = (1,2), \quad P_2 = (3,2), \quad P_3 = (4,0).$$

a) Écrire la représentation paramétrique de la courbe.

b) Calculer $C'(0)$ et $C'(1)$.

c) Étudier les symétries éventuelles de la courbe.

d) Calculer $C(1/2)$.

Exercice 8.4 (Démonstration de la propriété de convexité)**.** Démontrer que toute courbe de Bézier est contenue dans l'enveloppe convexe de ses points de contrôle. Préciser le rôle de la positivité des polynômes de Bernstein et celui de la partition de l'unité.

Exercice 8.5 (Invariance affine)**.** Soit A une application affine du plan dans lui-même. Démontrer que l'image par A d'une courbe de Bézier est la courbe de Bézier définie par les images des points de contrôle. Appliquer le résultat à une translation et à une homothétie.

Exercice 8.6 (Algorithme de De Casteljau)**.** On considère les points

$$P_0 = (0,0), \quad P_1 = (2,2), \quad P_2 = (4,0).$$

Calculer le point de la courbe pour $t = 1/2$ à l'aide de l'algorithme de De Casteljau. Comparer avec le calcul direct à partir de la formule de Bernstein.

Exercice 8.7 (Raccordement)**.** Deux courbes de Bézier de degrés n et m sont raccordées en un point commun. Établir les conditions nécessaires pour obtenir respectivement un raccordement C^0, G^1 et C^1. Illustrer chaque condition par un schéma.

Exercice 8.8 (Étude numérique)**.** Écrire un programme qui prend en entrée des points de contrôle et un paramètre $t \in [0,1]$, puis calcule le point de la courbe par l'algorithme de De Casteljau. Comparer le résultat avec l'évaluation directe de la formule de Bernstein pour plusieurs valeurs de t.

9 Questions possibles du jury

1. Pourquoi les courbes de Bézier passent-elles par leurs extrémités mais pas, en général, par les points de contrôle intermédiaires ?
2. En quoi la partition de l'unité intervient-elle dans la preuve de la propriété d'enveloppe convexe ?
3. Pourquoi l'algorithme de De Casteljau est-il intéressant sur le plan numérique ?
4. Quelle différence existe-t-il entre continuité G^1 et continuité C^1 ?
5. Comment construire une courbe plus complexe à partir de plusieurs arcs de Bézier ?
6. Quel est le lien entre les courbes de Bézier et les polynômes de Bernstein ?
7. Dans quels contextes les courbes de Bézier sont-elles préférables à une interpolation polynomiale classique ?

10 Conclusion

Les courbes de Bézier fournissent une méthode de construction géométrique des courbes paramétrées à partir de points de contrôle. Leur définition repose sur les polynômes de Bernstein, dont la positivité et la partition de l'unité expliquent notamment la propriété d'enveloppe convexe.

Le calcul des dérivées donne les directions tangentes aux extrémités, tandis que l'algorithme de De Casteljau offre une construction récursive robuste et une méthode de subdivision. Ces résultats expliquent l'intérêt des courbes de Bézier en géométrie algorithmique, en infographie et en conception assistée par ordinateur.

Références

[1] G. Farin, *Curves and Surfaces for CAGD : A Practical Guide*, 5e édition, Morgan Kaufmann, 2002.

[2] J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner et J. F. Hughes, *Computer Graphics : Principles and Practice*, 2e édition, Addison-Wesley, 1990.

[3] M. E. Mortenson, *Geometric Modeling*, 3e édition, Wiley, 2006.

[4] P. Bézier, *Courbes et surfaces*, Mathématiques et CAO, Hermès, 1986.

[5] S. N. Bernstein, "Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités", *Communications de la Société mathématique de Kharkov*, série 2, vol. 13, 1912–1913, p. 1–2.