Préparation à l'oral du CAPES de mathématiques

Exemples d'études de courbes

Fonctions, dérivation, asymptotes et représentation graphique

Problématique : comment combiner les outils de l'analyse pour déterminer les caractéristiques essentielles d'une courbe et construire une représentation graphique raisonnée ?

Leçon de synthèse avec exemples et exercices

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**
- 1.1 Prérequis . . . 2
- 1.2 Objectifs . . . 2

2 Méthode générale d'étude d'une courbe **2**

3 Premier exemple : une fonction polynomiale **3**
- 3.1 Domaine et symétrie . . . 3
- 3.2 Limites . . . 3
- 3.3 Variations . . . 3
- 3.4 Zéros et tangentes . . . 4
- 3.5 Convexité . . . 4
- 3.6 Bilan . . . 4

4 Deuxième exemple : une fonction rationnelle **4**
- 4.1 Domaine et décomposition . . . 4
- 4.2 Limites et asymptotes . . . 4
- 4.3 Variations . . . 5
- 4.4 Intersection avec les axes . . . 5
- 4.5 Bilan . . . 5

5 Troisième exemple : une fonction logarithmique **5**
- 5.1 Limites . . . 5
- 5.2 Variations . . . 6
- 5.3 Convexité . . . 6
- 5.4 Bilan . . . 6

6 Quatrième exemple : une fonction trigonométrique **6**
- 6.1 Propriétés générales . . . 6
- 6.2 Dérivée et variations . . . 6
- 6.3 Convexité . . . 7
- 6.4 Intérêt de l'exemple . . . 7

7 Cinquième exemple : étude d'une courbe paramétrée **7**

8 Outils complémentaires **7**
- 8.1 Recherche d'une tangente . . . 7
- 8.2 Convexité et inégalité . . . 7
- 8.3 Développements limités . . . 8

9 Représentation graphique et outils numériques **8**
- 9.1 Exemple de tracé avec PGFPlots . . . 8

10 Liste d'exercices **8**

11 Pistes pour la présentation orale **10**

12 Conclusion **11**

1 Prérequis et objectifs

1.1 Prérequis

Cette leçon mobilise les connaissances suivantes :

— ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions réelles ;

— limites en un point et à l'infini ;

— continuité et théorème des valeurs intermédiaires ;

— dérivée, sens de variation et extremums ;

— calcul des dérivées usuelles et des dérivées composées ;

— équations de droites, tangentes et interprétation géométrique de la dérivée ;

— calcul algébrique, factorisation et résolution d'équations ;

— représentation graphique dans un repère.

Selon les exemples retenus, on peut également utiliser la dérivée seconde, les développements limités, les fonctions logarithme et exponentielle, ainsi que les notions de convexité et de concavité.

1.2 Objectifs

L'objectif est de savoir mener une étude de fonction cohérente, depuis la détermination du domaine jusqu'à la représentation de sa courbe représentative. Il s'agit notamment de :

— choisir les calculs pertinents en fonction de la fonction étudiée ;

— exploiter les limites pour repérer les asymptotes ;

— établir un tableau de variations rigoureux ;

— déterminer les tangentes et étudier la convexité ;

— mettre en évidence les symétries et les positions relatives ;

— utiliser un graphique comme synthèse des résultats analytiques ;

— distinguer les résultats démontrés des observations numériques ou graphiques.

La leçon vise aussi à montrer qu'une étude de courbe n'est pas une succession mécanique de calculs : les outils doivent être choisis en fonction du problème posé.

2 Méthode générale d'étude d'une courbe

Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble D. Sa courbe représentative est

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

Une étude complète peut comporter les étapes suivantes.

1. **Domaine de définition.** Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'expression de $f(x)$ a un sens.
2. **Symétries.** Rechercher une éventuelle parité, périodicité ou symétrie par rapport à un point.
3. **Limites.** Calculer les limites aux bornes du domaine et aux points exclus du domaine.
4. **Asymptotes.** Rechercher les asymptotes verticales, horizontales ou obliques.
5. **Dérivée.** Calculer f', étudier son signe et en déduire les variations de f.

6. **Points remarquables.** Déterminer les zéros, les extremums et les intersections avec les axes.
7. **Tangentes.** Pour un point d'abscisse a où f est dérivable, utiliser
$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$
8. **Convexité.** Lorsque f'' existe, étudier son signe pour préciser la forme de la courbe et rechercher les points d'inflexion.
9. **Synthèse graphique.** Rassembler les résultats dans un tableau et construire une représentation cohérente.

Remarque 2.1. *Toutes ces étapes ne sont pas systématiquement nécessaires. Une étude efficace commence par les propriétés qui simplifient les calculs : factorisation, symétrie, changement de variable ou comparaison avec une fonction connue.*

3 Premier exemple : une fonction polynomiale

Considérons
$$f(x) = x^3 - 3x.$$

3.1 Domaine et symétrie

La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a
$$f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x).$$
La fonction est impaire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

3.2 Limites

Le terme dominant est x^3. Par conséquent,
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
Il n'y a pas d'asymptote horizontale ou oblique à l'infini.

3.3 Variations

La dérivée est
$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1).$$
Elle est positive pour $x < -1$ et $x > 1$, négative pour $-1 < x < 1$, et nulle en -1 et 1.

Les valeurs remarquables sont
$$f(-1) = 2, \qquad f(1) = -2.$$

Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction possède un maximum local égal à 2 en -1 et un minimum local égal à -2 en 1.

3.4 Zéros et tangentes

On factorise :

$$f(x) = x(x^2 - 3).$$

Les zéros sont donc

$$-\sqrt{3}, \quad 0, \quad \sqrt{3}.$$

En $x = 0$, la tangente a pour équation

$$y = f(0) + f'(0)x = -3x.$$

3.5 Convexité

On a

$$f''(x) = 6x.$$

La fonction est concave sur $]-\infty, 0[$, convexe sur $]0, +\infty[$. Le point $O(0, 0)$ est un point d'inflexion, car la convexité change en 0.

3.6 Bilan

Cet exemple permet d'étudier les variations, les extremums, les zéros, la symétrie centrale et la convexité d'une fonction polynomiale. Il montre également que la connaissance du signe de la dérivée seconde complète celle du signe de la dérivée première.

4 Deuxième exemple : une fonction rationnelle

Considérons

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

4.1 Domaine et décomposition

Le domaine est

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

La division euclidienne donne

$$g(x) = x + 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

Cette écriture permet de lire directement le comportement à l'infini et la position de la courbe par rapport à une droite.

4.2 Limites et asymptotes

Au voisinage de 1,

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = +\infty.$$

La droite $x = 1$ est une asymptote verticale.

À l'infini,

$$g(x) - (x + 1) = \frac{2}{x - 1} \longrightarrow 0.$$

La droite $y = x + 1$ est une asymptote oblique.

De plus,

$$g(x) - (x + 1) = \frac{2}{x - 1}.$$

La courbe est sous cette droite pour $x < 1$ et au-dessus pour $x > 1$.

4.3 Variations

La dérivée vaut

$$g'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

Le numérateur s'annule en

$$\alpha = 1 - \sqrt{2}, \qquad \beta = 1 + \sqrt{2}.$$

Comme le dénominateur est strictement positif sur le domaine, le signe de g' est celui de $(x - \alpha)(x - \beta)$.

Les valeurs aux points critiques sont

$$g(\alpha) = 2 - 2\sqrt{2}, \qquad g(\beta) = 2 + 2\sqrt{2}.$$

On obtient :

— g est croissante sur $]-\infty, \alpha]$;

— g est décroissante sur $[\alpha, 1[$;

— g est décroissante sur $]1, \beta]$;

— g est croissante sur $[\beta, +\infty[$.

La courbe possède un maximum local sur la branche de gauche et un minimum local sur la branche de droite.

4.4 Intersection avec les axes

Le numérateur $x^2 + 1$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$. La courbe ne coupe donc pas l'axe des abscisses. En revanche,

$$g(0) = -1,$$

et elle coupe l'axe des ordonnées au point $(0, -1)$.

4.5 Bilan

La décomposition en éléments simples, ici réduite à une division euclidienne, est un outil efficace pour étudier une fonction rationnelle. Elle fournit simultanément une asymptote oblique et une information sur la position relative de la courbe.

5 Troisième exemple : une fonction logarithmique

Considérons

$$h(x) = \frac{\ln x}{x}, \qquad x > 0.$$

5.1 Limites

Le domaine est $]0, +\infty[$. On a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

La droite $x = 0$ est une asymptote verticale. La droite $y = 0$ est une asymptote horizontale en $+\infty$.

5.2 Variations

On calcule

$$h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Puisque $x^2 > 0$, le signe de h' dépend de $1 - \ln x$. Il s'annule en $x = \mathrm{e}$, est positif avant e, et négatif après e.

Ainsi, h est croissante sur $]0, \mathrm{e}]$, puis décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. Son maximum global est

$$h(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

5.3 Convexité

Une nouvelle dérivation donne

$$h''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Le dénominateur est positif. Le changement de signe du numérateur se produit lorsque

$$x = \mathrm{e}^{3/2}.$$

La fonction est concave sur $]0, \mathrm{e}^{3/2}[$, puis convexe sur $]\mathrm{e}^{3/2}, +\infty[$. Son point d'inflexion est

$$I\left(\mathrm{e}^{3/2}, \frac{3}{2\mathrm{e}^{3/2}}\right).$$

5.4 Bilan

Cet exemple illustre le rôle des limites et des dérivées dans l'étude d'une fonction transcendante. Il rappelle aussi que les croissances comparées de $\ln x$ et de x permettent d'établir la limite à l'infini.

6 Quatrième exemple : une fonction trigonométrique

Étudions

$$p(x) = \sin x.$$

6.1 Propriétés générales

La fonction est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et périodique de période 2π. Il suffit donc d'étudier son comportement sur un intervalle de longueur 2π, puis d'utiliser la périodicité.

6.2 Dérivée et variations

On a

$$p'(x) = \cos x.$$

Les points critiques vérifient

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

La fonction est croissante sur

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$$

et décroissante sur

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right].$$

Elle admet des maxima égaux à 1 et des minima égaux à -1.

6.3 Convexité

La dérivée seconde est

$$p''(x) = -\sin x.$$

Les points $k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$, sont des points d'inflexion, car le signe de p'' change à chacun d'eux.

6.4 Intérêt de l'exemple

La périodicité simplifie l'étude globale et met en évidence la possibilité de réduire le domaine d'étude. Elle est utile pour aborder les phénomènes oscillatoires, notamment en physique.

7 Cinquième exemple : étude d'une courbe paramétrée

Une courbe peut également être donnée par des équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t, \\ y(t) = \sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

On a

$$x(t)^2 + y(t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

La courbe est donc le cercle unité.

Le vecteur dérivé est

$$(x'(t), y'(t)) = (-\sin t, \cos t).$$

Il ne s'annule jamais : la paramétrisation est régulière. Au point correspondant à t, la tangente est dirigée par ce vecteur.

Pour $t = t_0$, le point est

$$M_0 = (\cos t_0, \sin t_0).$$

La tangente au cercle en ce point a pour équation

$$x \cos t_0 + y \sin t_0 = 1.$$

Cet exemple ouvre sur la géométrie différentielle élémentaire et montre qu'une courbe peut être étudiée sans être décrite directement comme le graphe d'une fonction $y = f(x)$.

8 Outils complémentaires

8.1 Recherche d'une tangente

Si f est dérivable en a, la tangente à la courbe en $A = (a, f(a))$ a pour équation

$$T_a : \quad y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Pour déterminer les positions relatives de la courbe et de sa tangente, on étudie le signe de

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a).$$

8.2 Convexité et inégalité

Si f est deux fois dérivable sur un intervalle et $f'' \geq 0$, alors f y est convexe. Lorsque f est dérivable, sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes sur cet intervalle.

Cette propriété peut servir à démontrer des inégalités. Par exemple, pour tout $x > 0$,

$$\ln x \leq x - 1.$$

En effet, la fonction

$$\varphi(x) = x - 1 - \ln x$$

atteint son minimum global 0 en $x = 1$.

8.3 Développements limités

Lorsqu'une fonction admet un développement limité au voisinage d'un point, celui-ci peut préciser la position de la courbe par rapport à une tangente.

Si, au voisinage de 0,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + cx^2 + o(x^2),$$

alors

$$f(x) - f(0) - f'(0)x = cx^2 + o(x^2).$$

Si $c \neq 0$, le signe de cette différence est celui de c pour x suffisamment proche de 0, avec $x \neq 0$.

Cette méthode complète l'étude par les dérivées et permet d'obtenir des informations locales plus fines.

9 Représentation graphique et outils numériques

Le calcul formel et les logiciels de géométrie dynamique peuvent aider à conjecturer des propriétés et à vérifier la cohérence d'un graphique. Ils ne remplacent pas les démonstrations.

On peut notamment utiliser :

— GeoGebra pour tracer une courbe et ses tangentes ;

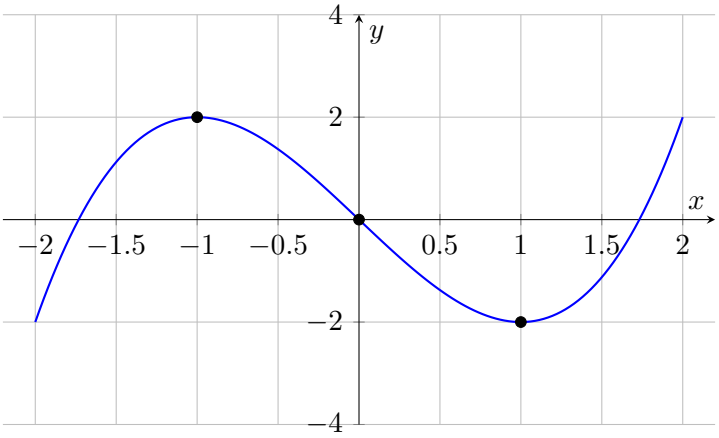
— Python et Matplotlib pour représenter des fonctions ;

— un logiciel de calcul formel pour vérifier une dérivée ou une factorisation.

La fenêtre graphique doit être choisie avec soin. Une asymptote verticale ou une croissance rapide peut rendre illisible une courbe tracée sur un intervalle trop large.

9.1 Exemple de tracé avec PGFPlots

Le code suivant trace la courbe de $f(x) = x^3 - 3x$.



10 Liste d'exercices

Les exercices suivants permettent de réinvestir les méthodes précédentes. Ils peuvent être proposés dans l'ordre ou choisis selon le niveau des candidats.

Exercice 1 – Fonction polynomiale

Étudier la fonction

$$f(x) = x^4 - 4x^2.$$

Déterminer :

1. sa parité et ses limites ;
2. ses variations et ses extremums ;
3. ses zéros et le signe de f ;
4. ses intervalles de convexité et ses points d'inflexion ;
5. une représentation graphique.

Exercice 2 – Fonction rationnelle

Étudier

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 2}.$$

On déterminera son domaine, ses limites, ses asymptotes, ses variations et ses intersections avec les axes. On précisera également la position de la courbe par rapport à son asymptote oblique.

Exercice 3 – Fonction logarithmique

Étudier

$$h(x) = \frac{\ln x}{x^2}, \qquad x > 0.$$

On déterminera les limites, les variations et la convexité. On pourra ensuite résoudre graphiquement, puis analytiquement, l'inéquation $h(x) \geq 0$.

Exercice 4 – Fonction exponentielle

Étudier

$$q(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

Déterminer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$, ses variations, ses extremums et ses points d'inflexion.

Exercice 5 – Tangente et position relative

Soit

$$r(x) = \ln(1 + x), \qquad x > -1.$$

1. Déterminer l'équation de la tangente en 0.
2. Étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente.
3. En déduire une inégalité classique.

Exercice 6 – Courbe trigonométrique

Étudier la fonction

$$s(x) = \sin x + \cos x.$$

On cherchera une écriture sous la forme

$$s(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

puis on déterminera ses extrema, ses zéros et sa période.

Exercice 7 – Paramétrisation

On considère

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t, \\ y(t) = 1 - \cos t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

1. Étudier la régularité de la paramétrisation.
2. Déterminer les tangentes aux points remarquables.
3. Étudier les variations de $x(t)$ et de $y(t)$.
4. Reconnaître la courbe obtenue et la tracer.

Exercice 8 – Problème d'optimisation

Un rectangle a un périmètre fixé égal à $P > 0$. On note x la longueur d'un côté et y celle du côté adjacent.

1. Exprimer y en fonction de x.
2. Déterminer le domaine admissible.
3. Étudier l'aire $A(x) = xy$.
4. Déterminer les dimensions qui maximisent l'aire.
5. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 9 – Étude avec paramètre

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère

$$f_a(x) = x^3 - 3ax.$$

Étudier les variations de f_a selon le signe de a. Déterminer le nombre de points critiques et préciser leur nature. Discuter les changements de forme de la courbe.

Exercice 10 – Préparation à l'oral

Choisir une fonction parmi celles proposées dans cette leçon. Présenter en dix minutes :

1. la motivation du choix ;
2. les résultats théoriques utilisés ;
3. une étude rigoureuse et organisée ;
4. un graphique annoté ;
5. une question ou une application permettant de prolonger l'étude.

11 Pistes pour la présentation orale

Pour rendre la présentation convaincante, il est préférable de sélectionner deux ou trois exemples complémentaires plutôt que de juxtaposer de nombreuses études.

Une organisation possible est :

1. présenter la méthode générale et ses justifications ;
2. développer une fonction polynomiale, où les dérivées et la convexité jouent un rôle central ;
3. étudier une fonction rationnelle, qui fait apparaître les asymptotes ;
4. proposer une fonction logarithmique ou exponentielle pour exploiter les limites et les croissances comparées ;

5. terminer par une application, une inégalité ou une courbe paramétrée.

Les questions à anticiper concernent notamment :

— les conditions d'application des théorèmes utilisés ;

— la différence entre une tangente horizontale et un extremum ;

— la définition d'un point d'inflexion ;

— la distinction entre asymptote et simple approximation ;

— le rôle des outils numériques dans la validation d'une conjecture ;

— les liens entre étude de courbe, résolution d'équations et optimisation.

12 Conclusion

L'étude de courbes constitue une synthèse de plusieurs outils de l'analyse : limites, continuité, dérivation, variations, convexité et développements limités. Elle associe une démarche théorique rigoureuse à une interprétation géométrique.

Les exemples polynomiaux, rationnels, logarithmiques et trigonométriques illustrent des comportements distincts. Les courbes paramétrées ouvrent, quant à elles, vers une description géométrique plus générale.

La compétence essentielle consiste à choisir les outils adaptés, à justifier les résultats et à traduire ces résultats en une représentation graphique cohérente.

Références

[1] X. Gourdon, *Les maths en tête – Analyse*, Ellipses, édition à vérifier selon la version consultée.

[2] J.-P. Ramis, A. Warusfel et collaborateurs, *Mathématiques, tout-en-un pour la licence*, Dunod, collection et édition à préciser selon le volume utilisé.

[3] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3e édition, McGraw-Hill, 1976.

[4] T. M. Apostol, *Calculus, Volume 1*, 2e édition, Wiley, 1967.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Consulter les programmes en vigueur sur : https://www.education.gouv.fr/.

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Rapports de jury du CAPES externe de mathématiques*. Consulter les rapports correspondant à la session préparée sur : https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.

[7] GeoGebra, *Logiciel de géométrie dynamique et de représentation graphique*. https://www.geogebra.org/.

[8] C. Feuersänger, *PGFPlots – Manual*, documentation du paquet LaTeX : https://pgfplots.sourceforge.net/.