Préparation à l'oral du CAPES de mathématiques

Aires

Définitions, propriétés géométriques, mesure et intégration

Problématique : Comment définir et calculer l'aire d'une figure plane, et comment étendre ces méthodes à des domaines délimités par des courbes ?

Leçon de synthèse

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**
- 1.1 Prérequis . . . 2
- 1.2 Objectifs . . . 2

2 Définir et mesurer une aire **2**
- 2.1 Aire d'une figure plane . . . 2
- 2.2 Propriétés fondamentales . . . 2
- 2.3 Unités d'aire . . . 3

3 Aires des figures usuelles **3**
- 3.1 Rectangle et carré . . . 3
- 3.2 Parallélogramme . . . 3
- 3.3 Triangle . . . 3
- 3.4 Trapèze . . . 4
- 3.5 Disque et cercle . . . 4
- 3.6 Tableau récapitulatif . . . 4

4 Calculer une aire par décomposition **4**
- 4.1 Principe . . . 4
- 4.2 Aires et similitudes . . . 5

5 Aire et coordonnées **5**
- 5.1 Aire d'un triangle dans un repère . . . 5
- 5.2 Aire d'un polygone . . . 5

6 Aire sous une courbe et intégrale **5**
- 6.1 De l'approximation à l'intégrale . . . 5
- 6.2 Théorème fondamental . . . 6
- 6.3 Aire entre deux courbes . . . 6
- 6.4 Intégrale et aire algébrique . . . 6

7 Quelques applications **7**
- 7.1 Calcul d'une aire dépendant d'un paramètre . . . 7
- 7.2 Aire d'une ellipse . . . 7
- 7.3 Méthode de Monte-Carlo . . . 7

8 Exercices proposés **7**
- 8.1 Exercice 1 : conversions d'unités . . . 7
- 8.2 Exercice 2 : aire d'un triangle . . . 8
- 8.3 Exercice 3 : une figure composée . . . 8
- 8.4 Exercice 4 : similitudes . . . 8
- 8.5 Exercice 5 : aire dans un repère . . . 8
- 8.6 Exercice 6 : aire sous une courbe . . . 8
- 8.7 Exercice 7 : aire entre deux courbes . . . 8
- 8.8 Exercice 8 : aire algébrique et aire géométrique . . . 8
- 8.9 Exercice 9 : aire d'une ellipse . . . 8
- 8.10 Exercice 10 : approximation numérique . . . 9

9 Éléments de correction **9**

10 Difficultés et erreurs classiques **10**

11 Conclusion et ouverture **11**

1 Prérequis et objectifs

1.1 Prérequis

Cette leçon mobilise plusieurs connaissances :

— les figures usuelles du plan et leurs propriétés ;

— les fractions, les rapports de proportionnalité et les conversions d'unités ;

— le théorème de Pythagore et la trigonométrie dans le triangle rectangle ;

— les fonctions, leur représentation graphique et la lecture d'un tableau de variations ;

— les notions de limite, de continuité et de primitive, dans le cadre du calcul intégral.

Les premiers points relèvent principalement du collège et du lycée. Le calcul intégral permet ensuite d'étudier des régions dont le bord est courbe.

1.2 Objectifs

L'objectif est de présenter une approche progressive de la notion d'aire, depuis les formules géométriques usuelles jusqu'au calcul intégral. Il s'agit de savoir choisir une méthode de calcul adaptée à une figure, de justifier les propriétés utilisées, de contrôler l'homogénéité des unités et d'interpréter une intégrale comme une aire lorsque les hypothèses nécessaires sont satisfaites.

La leçon met également en évidence la distinction entre l'aire géométrique, qui est positive, et l'intégrale, qui peut être signée.

2 Définir et mesurer une aire

2.1 Aire d'une figure plane

L'aire est une grandeur associée à une partie du plan. Elle mesure la surface occupée par cette partie et s'exprime au moyen d'une unité d'aire.

Dans une approche élémentaire, on commence par les figures polygonales, puis on étend la notion à des domaines délimités par des courbes.

Définition 2.1. *Une aire est une mesure positive ou nulle d'une partie plane, compatible avec les propriétés de normalisation, d'invariance par déplacement et d'additivité.*

Pour formaliser cette définition dans le cadre de la théorie de la mesure, il convient de préciser la classe de parties considérées. Dans cette leçon, on se limite principalement aux figures géométriques usuelles et aux domaines délimités par des courbes continues.

2.2 Propriétés fondamentales

Propriété 2.2 (Normalisation)**.** *Le carré unité, de côté égal à une unité de longueur, a une aire égale à une unité d'aire.*

Propriété 2.3 (Invariance par déplacement)**.** *Deux figures superposables ont la même aire. En particulier, une translation, une rotation ou une symétrie conserve l'aire.*

Propriété 2.4 (Additivité)**.** *Si une figure est réunion de deux parties mesurables dont les intérieurs sont disjoints, alors son aire est la somme des aires des deux parties.*

$$\mathcal{A}(E \cup F) = \mathcal{A}(E) + \mathcal{A}(F).$$

Propriété 2.5 (Monotonie)**.** *Si $E \subset F$, alors*

$$\mathcal{A}(E) \leq \mathcal{A}(F).$$

Ces propriétés permettent de décomposer une figure complexe en figures élémentaires, ou de l'encadrer par des figures dont l'aire est connue.

2.3 Unités d'aire

L'unité internationale d'aire est le mètre carré, noté m^2.
Les conversions reposent sur le carré du rapport entre les unités de longueur :

$$1\,\mathrm{m}^2 = 100\,\mathrm{dm}^2, \qquad 1\,\mathrm{m}^2 = 10\,000\,\mathrm{cm}^2.$$

Pour les unités agraires :

$$1\,\mathrm{are} = 100\,\mathrm{m}^2, \qquad 1\,\mathrm{hectare} = 10\,000\,\mathrm{m}^2.$$

Remarque 2.6. *Une erreur classique consiste à convertir une aire comme une longueur. Le facteur de conversion doit être élevé au carré.*

3 Aires des figures usuelles

3.1 Rectangle et carré

Pour un rectangle de longueur L et de largeur l,

$$\boxed{\mathcal{A} = Ll.}$$

Pour un carré de côté c,

$$\boxed{\mathcal{A} = c^2.}$$

Ces formules sont cohérentes avec le pavage par des carrés unités.

3.2 Parallélogramme

Pour un parallélogramme de base b et de hauteur correspondante h,

$$\boxed{\mathcal{A} = bh.}$$

La hauteur est la distance perpendiculaire entre les droites portant les côtés opposés. Elle ne doit pas être confondue avec la longueur d'un côté oblique.

La formule se justifie par découpage et recollement : un triangle découpé à une extrémité peut être déplacé à l'autre extrémité pour former un rectangle.

3.3 Triangle

Pour un triangle de base b et de hauteur h,

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{bh}{2}.}$$

En effet, deux copies d'un même triangle peuvent former un parallélogramme d'aire bh.
Si deux côtés a, b et l'angle compris θ sont connus, on dispose aussi de la formule

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

Pour un triangle de côtés a, b, c, on peut utiliser la formule de Héron. En posant

$$p = \frac{a+b+c}{2},$$

on obtient

$$\boxed{\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.}$$

3.4 Trapèze

Pour un trapèze dont les bases parallèles ont pour longueurs B et b, et dont la hauteur est h,

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{(B+b)h}{2}.}$$

Cette formule découle du découpage du trapèze ou de l'assemblage de deux trapèzes identiques en un parallélogramme.

3.5 Disque et cercle

Pour un disque de rayon r,

$$\boxed{\mathcal{A} = \pi r^2.}$$

Le cercle est la frontière du disque. Dans le plan, cette frontière seule a une aire nulle au sens de la mesure usuelle, tandis que le disque possède une aire égale à πr^2.

Pour un secteur angulaire de mesure θ, en radians, on a

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{\theta}{2} r^2.}$$

En degrés, si l'angle mesure α,

$$\mathcal{A} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2.$$

3.6 Tableau récapitulatif

Figure	Aire
Rectangle	Ll
Carré	c^2
Parallélogramme	bh
Triangle	$\dfrac{bh}{2}$
Trapèze	$\dfrac{(B+b)h}{2}$
Disque	πr^2
Secteur circulaire	$\dfrac{\theta r^2}{2}$, avec θ en radians

4 Calculer une aire par décomposition

4.1 Principe

La propriété d'additivité permet de calculer l'aire d'une figure en la décomposant en figures simples.

On peut également soustraire l'aire d'une partie intérieure lorsque la figure recherchée est obtenue par retrait de cette partie.

Exemple 4.1. *Considérons un rectangle de dimensions* 10 *cm et* 6 *cm, dans lequel on découpe un disque de rayon* 2 *cm.*

L'aire restante vaut

$$\mathcal{A} = 10 \times 6 - \pi \times 2^2 = 60 - 4\pi \text{ cm}^2.$$

Numériquement,

$$\mathcal{A} \approx 47{,}43 \text{ cm}^2.$$

4.2 Aires et similitudes

Lorsqu'une figure est agrandie dans un rapport $k > 0$, toutes ses longueurs sont multipliées par k, tandis que son aire est multipliée par k^2.

Propriété 4.2. *Si deux figures sont semblables et si le rapport de similitude est k, alors*

$$\boxed{\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} = k^2.}$$

Cette propriété explique notamment pourquoi une photographie agrandie deux fois possède une aire quatre fois plus grande, si l'agrandissement est uniforme.

5 Aire et coordonnées

5.1 Aire d'un triangle dans un repère

Pour trois points $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$, l'aire du triangle ABC est

$$\boxed{\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix}\right|.}$$

Ainsi,

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right|.$$

Cette expression est la moitié de la valeur absolue du déterminant des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

5.2 Aire d'un polygone

Pour un polygone simple dont les sommets (x_i, y_i) sont donnés dans l'ordre, avec $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$, on dispose de la formule

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)\right|.}$$

Cette formule, parfois appelée formule du lacet, est particulièrement utile en géométrie analytique et en algorithmique.

6 Aire sous une courbe et intégrale

6.1 De l'approximation à l'intégrale

Considérons une fonction continue et positive f sur un intervalle $[a, b]$. On cherche l'aire du domaine compris entre sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

L'idée consiste à approcher ce domaine par des rectangles. En affinant le découpage, les sommes d'aires des rectangles convergent vers l'aire recherchée : c'est l'idée fondamentale de l'intégrale de Riemann.

6.2 Théorème fondamental

Théorème 6.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. L'aire du domaine situé sous sa courbe entre a et b est*

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

Si F est une primitive de f, alors

$$\boxed{\mathcal{A} = F(b) - F(a).}$$

Exemple 6.2. *Calculons l'aire sous la parabole $y = x^2$, entre $x = 0$ et $x = 2$.*

La fonction est positive sur $[0, 2]$, donc

$$\mathcal{A} = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \boxed{\frac{8}{3}}.$$

6.3 Aire entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. L'aire du domaine compris entre leurs graphes est

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.}$$

Exemple 6.3. *Considérons les courbes $y = x$ et $y = x^2$ sur $[0, 1]$. Comme $x \geq x^2$ sur cet intervalle,*

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 (x - x^2)\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \boxed{\frac{1}{6}}.\end{aligned}$$

6.4 Intégrale et aire algébrique

Lorsque f change de signe, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ représente une aire algébrique : les régions situées au-dessus de l'axe des abscisses contribuent positivement, celles situées en dessous contribuent négativement.

L'aire géométrique totale entre la courbe et l'axe des abscisses est alors

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\,dx.}$$

Il faut donc distinguer les deux expressions.

Exemple 6.4. *Sur $[-1, 1]$, considérons $f(x) = x$. On a*

$$\int_{-1}^1 x\,dx = 0$$

par imparité, alors que l'aire géométrique vaut

$$\int_{-1}^1 |x|\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 1.$$

7 Quelques applications

7.1 Calcul d'une aire dépendant d'un paramètre

Soit $a > 0$. L'aire sous la courbe $y = ax$, entre $x = 0$ et $x = 1$, vaut

$$\mathcal{A}(a) = \int_0^1 ax\,dx = \frac{a}{2}.$$

Cet exemple permet d'étudier la dépendance d'une aire par rapport à un paramètre et de mettre en évidence la linéarité de l'intégrale.

7.2 Aire d'une ellipse

L'ellipse de demi-axes $a > 0$ et $b > 0$, centrée à l'origine, est définie par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Une transformation affine envoyant le disque unité sur cette ellipse multiplie les aires par ab. Comme le disque unité a pour aire π, on obtient

$$\boxed{\mathcal{A} = \pi ab.}$$

On peut aussi retrouver ce résultat par intégration :

$$\mathcal{A} = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = \pi ab.$$

7.3 Méthode de Monte-Carlo

Une approche probabiliste consiste à placer une figure dans un domaine de référence dont l'aire est connue, puis à tirer des points uniformément au hasard.

Si N points sont tirés dans un rectangle de surface S, et si N_{int} d'entre eux tombent dans la figure, on estime son aire par

$$\boxed{\mathcal{A} \approx S\frac{N_{\text{int}}}{N}.}$$

Cette méthode est utile lorsque les frontières sont complexes et que le calcul exact est difficile. Elle fournit une estimation et non, en général, une valeur exacte.

8 Exercices proposés

Les exercices suivants peuvent être utilisés pour l'entraînement à l'oral. Ils sont classés par difficulté croissante.

8.1 Exercice 1 : conversions d'unités

a) Convertir 3,5 m^2 en cm^2.

b) Convertir 42 000 m^2 en hectares.

c) Expliquer pourquoi le facteur de conversion entre m^2 et cm^2 est 10 000, et non 100.

Indications : utiliser le carré du facteur de conversion des longueurs.

8.2 Exercice 2 : aire d'un triangle

Un triangle a pour côtés 13, 14 et 15 cm. Calculer son aire à l'aide de la formule de Héron.
Indication : calculer le demi-périmètre, puis les trois différences avec les côtés.

8.3 Exercice 3 : une figure composée

Un rectangle de dimensions 12 cm et 8 cm contient un disque de rayon 3 cm entièrement inscrit dans le rectangle.

Calculer l'aire de la partie du rectangle extérieure au disque.
Indication : soustraire l'aire du disque de celle du rectangle.

8.4 Exercice 4 : similitudes

Une figure a une aire de 18 cm^2. On construit une figure semblable avec un rapport de similitude égal à $3/2$.

Calculer l'aire de la nouvelle figure et expliquer pourquoi l'aire n'est pas multipliée par $3/2$.

8.5 Exercice 5 : aire dans un repère

On considère les points

$$A(1,1), \qquad B(5,2), \qquad C(3,6).$$

Calculer l'aire du triangle ABC à l'aide d'un déterminant. Vérifier le résultat par une décomposition géométrique ou une autre méthode.

8.6 Exercice 6 : aire sous une courbe

Calculer l'aire du domaine situé entre la courbe $y = 4 - x^2$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[-2, 2]$.
Indication : vérifier le signe de la fonction, puis calculer l'intégrale.

8.7 Exercice 7 : aire entre deux courbes

Déterminer l'aire comprise entre les paraboles

$$y = x^2 \qquad \text{et} \qquad y = 2x$$

sur l'intervalle $[0, 2]$.
Indication : comparer les deux fonctions sur l'intervalle avant d'intégrer leur différence.

8.8 Exercice 8 : aire algébrique et aire géométrique

Soit $f(x) = x^2 - 1$ sur $[-2, 2]$.

a) Calculer $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.
b) Déterminer l'aire géométrique comprise entre la courbe et l'axe des abscisses.
c) Expliquer la différence entre les deux résultats.

8.9 Exercice 9 : aire d'une ellipse

À partir du disque unité, démontrer que l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

a pour aire πab.

On proposera une démonstration par changement d'échelle et une démonstration par intégration.

8.10 Exercice 10 : approximation numérique

On souhaite estimer l'aire sous la courbe $y = e^{-x^2}$ sur $[0, 2]$.

a) Proposer une méthode de rectangles.

b) Expliquer comment améliorer l'approximation.

c) Comparer cette méthode avec une estimation de Monte-Carlo.

9 Éléments de correction

Exercice 1

$$3{,}5\ \text{m}^2 = 35\,000\ \text{cm}^2, \qquad 42\,000\ \text{m}^2 = 4{,}2\ \text{ha}.$$

Comme 1 m = 100 cm, on a $1\ \text{m}^2 = 100^2\ \text{cm}^2$.

Exercice 2

Le demi-périmètre vaut $p = 21$. Ainsi,

$$\mathcal{A} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84\ \text{cm}^2.$$

Exercice 3

$$\mathcal{A} = 12 \times 8 - \pi \times 3^2 = 96 - 9\pi\ \text{cm}^2.$$

Exercice 4

$$\mathcal{A}' = 18 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{2}\ \text{cm}^2.$$

Exercice 5

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,|(5-1)(6-1) - (2-1)(3-1)| = 9 \text{ unités d'aire.}$$

Exercice 6

La fonction est positive sur $[-2, 2]$. Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx \\ &= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{32}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 7

Sur $[0,2]$, $2x \geq x^2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^2 (2x - x^2)\,dx \\ &= \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 8

La fonction est paire, et

$$\int_{-2}^{2} (x^2 - 1)\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

La fonction change de signe en -1 et 1. L'aire géométrique est

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 2\int_0^1 (1 - x^2)\,dx + 2\int_1^2 (x^2 - 1)\,dx \\ &= \frac{4}{3} + 2\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3} - 1\right) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2.\end{aligned}$$

Exercice 9

Le changement de variables $x = au$, $y = bv$ transforme le disque unité en l'ellipse et multiplie les aires par ab. L'aire du disque unité étant π, l'aire de l'ellipse est πab.

Exercice 10

Une méthode des rectangles consiste à subdiviser $[0,2]$ en n intervalles de même longueur, puis à additionner les aires approchées. La convergence s'améliore lorsque le pas diminue. La méthode de Monte-Carlo repose sur la proportion de points tombant sous la courbe, et fournit une estimation probabiliste.

10 Difficultés et erreurs classiques

Plusieurs points méritent une attention particulière lors de la présentation orale :

— confondre le cercle, qui désigne la frontière, et le disque, qui désigne la région intérieure ;

— utiliser un côté oblique à la place de la hauteur dans les formules du triangle ou du parallélogramme ;

— oublier de mettre au carré le facteur de conversion des longueurs ;

— appliquer une formule d'aire sans vérifier les hypothèses géométriques nécessaires ;

— confondre une intégrale signée avec une aire géométrique ;

— intégrer la différence de deux fonctions sans déterminer laquelle est supérieure à l'autre ;

— donner un résultat numérique sans unité ou sans contrôler sa cohérence.

11 Conclusion et ouverture

La notion d'aire relie la géométrie élémentaire à l'analyse. Les propriétés d'invariance, d'additivité et de monotonie fondent les méthodes de décomposition et de comparaison. Les formules usuelles permettent de traiter de nombreuses figures polygonales ou circulaires. L'intégrale étend ensuite le calcul des aires aux domaines délimités par des courbes.

Plusieurs prolongements sont possibles :

— la construction de l'intégrale de Riemann par les sommes de rectangles ;

— la mesure de Lebesgue et ses généralisations ;

— les changements de variables et les déterminants ;

— le calcul numérique d'aires ;

— les applications en probabilités, en physique et en géométrie.

À l'oral du CAPES, il est important de ne pas juxtaposer des formules : il convient de mettre en évidence leur justification, leurs domaines de validité et les liens entre les différents niveaux d'enseignement.

Références

[1] Euclide, *Les Éléments*, livres I et XII. Les résultats géométriques classiques sur les figures planes et les comparaisons de grandeurs constituent un arrière-plan historique de cette leçon.

[2] A. N. Kolmogorov et S. V. Fomine, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Éditions Mir. Ouvrage de référence pour les notions fondamentales d'analyse.

[3] X. Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses. Ouvrage de travail pour les fonctions, les primitives et les intégrales.

[4] J.-M. Monier, *Analyse MPSI*, Dunod. Référence pour le calcul intégral et les propriétés des fonctions continues.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du collège et du lycée général et technologique*. Consulter les textes officiels en vigueur sur `https://www.education.gouv.fr/`.

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques*. `https://eduscol.education.fr/`.

[7] Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM), ressources et publications pour l'enseignement des mathématiques. `https://www.univ-irem.fr/`.