Lecon d'oral du CAPES de mathematiques

Exemples d'utilisation d'un tableur

Preparation au concours

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Prerequis et objectifs **2**

2.1 Prerequis . . . 2

2.2 Objectifs . . . 2

3 Presentation generale du tableur **3**

3.1 Organisation et formules . . . 3

3.2 References relatives et absolues . . . 3

3.3 Fonctions usuelles . . . 3

4 Premier exemple : etudier une suite numerique **3**

4.1 Situation . . . 3

4.2 Construction du tableau . . . 4

4.3 Justification mathematique . . . 4

4.4 Interets pedagogiques . . . 4

5 Deuxieme exemple : recherche approchee d'une solution **5**

5.1 Probleme . . . 5

5.2 Exploration par tableau . . . 5

5.3 Methode de dichotomie . . . 5

5.4 Discussion mathematique . . . 6

6 Troisieme exemple : statistique descriptive **6**

6.1 Situation . . . 6

6.2 Calculs dans le tableur . . . 6

6.3 Representation graphique . . . 6

6.4 Interets et limites . . . 7

7 Quatrieme exemple : simulation d'une experience aleatoire **7**

7.1 Situation . . . 7

7.2 Construction de la simulation 7
7.3 Interpretation 7
7.4 Point de vigilance 8

8 Cinquieme exemple : interets composes **8**
8.1 Probleme 8
8.2 Mise en oeuvre 8
8.3 Interets pedagogiques 8

9 Sixieme exemple : optimisation numerique **9**
9.1 Probleme geometrique 9
9.2 Exploration avec un tableur 9
9.3 Preuve 9
9.4 Limite de la methode numerique 9

10 Dimension algorithmique du tableur **9**

11 Bilan didactique **10**
11.1 Apports du tableur 10
11.2 Limites et precautions 10
11.3 Evaluation des apprentissages 11

12 Liste d'exercices **11**

13 Conclusion **13**

14 References bibliographiques et sitographiques **13**

1 Introduction

Le tableur est un outil numerique permettant d'organiser des donnees, d'effectuer des calculs repetitifs, de produire des representations graphiques et de simuler des situations mathematiques.

Il occupe une place interessante dans l'enseignement des mathematiques : il permet de passer d'une situation concrete a un modele, de tester des conjectures et d'explorer des phenomenes difficiles a apprehender par un calcul manuel.

Son utilisation ne doit cependant pas se limiter a l'obtention de resultats numeriques. Les conjectures produites doivent etre interpretees, confrontees aux connaissances mathematiques et, lorsque cela est possible, demontrees.

Nous etudierons plusieurs usages complementaires :

— l'exploration de suites et de fonctions ;
— la recherche approchee de solutions d'equations ;
— le traitement statistique de donnees ;
— la simulation d'experiences aleatoires ;
— l'etude d'algorithmes et de problemes d'optimisation.

2 Prerequis et objectifs

2.1 Prerequis

Les notions mobilisees dependent du niveau scolaire auquel l'activite est destinee. On pourra notamment supposer acquises :

— les operations sur les nombres et les expressions algebriques ;
— la notion de fonction et la lecture d'un graphique ;
— les suites numeriques, en particulier les suites arithmetiques et geometriques ;
— les notions elementaires de statistique descriptive ;
— les probabilites sur un univers fini ;
— la notion d'algorithme, de variable et de condition.

Sur le plan instrumental, les eleves doivent progressivement apprendre a saisir une formule, a recopier une formule dans une plage de cellules, a utiliser des references relatives ou absolues et a construire un graphique.

2.2 Objectifs

A l'issue des activites, les eleves doivent etre capables :

— de traduire une situation mathematique dans un tableau ;
— d'automatiser une suite de calculs ;
— de distinguer une formule d'une valeur calculee ;
— d'utiliser un graphique pour explorer une fonction ;
— de formuler une conjecture a partir de resultats numeriques ;
— d'effectuer des simulations et d'interpreter leurs resultats ;
— d'identifier les limites d'une approximation numerique ;
— de justifier mathematiquement les conclusions obtenues.

Les competences travaillees sont chercher, modeliser, representer, calculer, raisonner, communiquer et utiliser des outils numeriques.

3 Presentation generale du tableur

3.1 Organisation et formules

Un tableur est organise en feuilles constituees de cellules reperees par une colonne et une ligne. Une cellule peut contenir une valeur, un texte ou une formule.

Une formule commence generalement par le signe `=`.

Par exemple, si la cellule A1 contient 3 et la cellule B1 contient 5, la formule suivante saisie en C1 :

```
=A1+B1
```

renvoie 8.

Les formules peuvent etre recopiees vers d'autres cellules. Le tableur adapte alors les references relatives. Cette propriete permet d'automatiser de nombreux calculs.

3.2 References relatives et absolues

Une reference relative, telle que `A1`, est adaptee lors de la recopie d'une formule.

Une reference absolue, telle que `$A$1`, conserve la meme cellule lors de la recopie.

Par exemple, si le taux d'une evolution est place en B1, la formule `=A2*(1+$B$1)` peut etre recopiee vers le bas sans changer la cellule contenant le taux.

Cette distinction est essentielle pour construire des tableaux fiables.

3.3 Fonctions usuelles

Les fonctions suivantes sont frequemment utiles :

Fonction	Utilisation
`SOMME`	Calculer une somme de valeurs.
`MOYENNE`	Calculer une moyenne.
`MIN, MAX`	Determiner les valeurs extremes.
`NB.SI`	Compter les cellules satisfaisant un critere.
`SI`	Effectuer un choix selon une condition.
`ALEA`	Generer un nombre aleatoire dans l'intervalle $[0;1[$.
`ALEA.ENTRE.BORNES`	Generer un entier aleatoire entre deux bornes.

Les noms et les separateurs des fonctions peuvent varier selon le logiciel et la langue de configuration. Les exemples qui suivent utilisent une syntaxe de type LibreOffice Calc en francais.

4 Premier exemple : etudier une suite numerique

4.1 Situation

On considere la suite definie par :

$$u_0 = 100, \qquad u_{n+1} = 0{,}8u_n + 12.$$

On souhaite etudier son evolution et conjecturer son comportement a long terme.

4.2 Construction du tableau

On saisit :

- en A1 : n ;
- en B1 : u_n ;
- en A2 : 0 ;
- en B2 : 100 ;
- en A3 : `=A2+1` ;
- en B3 : `=0,8*B2+12`.

On recopie les formules des cellules A3 et B3 vers le bas.

Les premieres valeurs sont :

$$u_0 = 100, \quad u_1 = 92, \quad u_2 = 85{,}6, \quad u_3 = 80{,}48.$$

La lecture du tableau suggere une convergence vers 60.

4.3 Justification mathematique

On cherche le point fixe de la relation de recurrence :

$$\ell = 0{,}8\ell + 12.$$

Ainsi,

$$0{,}2\ell = 12 \qquad \Longrightarrow \qquad \ell = 60.$$

Posons $v_n = u_n - 60$. Alors :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 60 = 0{,}8u_n - 48 = 0{,}8(u_n - 60).$$

Par consequent,

$$v_n = (u_0 - 60) \times 0{,}8^n = 40 \times 0{,}8^n.$$

Puisque $0 < 0{,}8 < 1$, on a $v_n \to 0$, donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 60.}$$

Le tableur permet de conjecturer la limite, tandis que l'etude mathematique etablit rigoureusement le resultat.

4.4 Interets pedagogiques

Cette activite permet :

- de comprendre la recurrence comme un processus iteratif ;
- de relier tableau de valeurs, representation graphique et expression explicite ;
- de distinguer observation numerique et demonstration ;
- d'etudier l'effet d'une modification des parametres.

5 Deuxieme exemple : recherche approchee d'une solution

5.1 Probleme

On souhaite determiner une valeur approchee de la solution de l'equation :

$$x^2 = 2.$$

On pose :

$$f(x) = x^2 - 2.$$

La solution positive est $\sqrt{2}$.

5.2 Exploration par tableau

On remplit la colonne A avec des valeurs de x comprises entre 1 et 2, par exemple avec un pas de 0,1.

Dans la colonne B, on calcule :

$$f(x) = x^2 - 2.$$

La formule a saisir en B2, si la valeur de x est en A2, est :

`=A2*A2-2`.

On observe un changement de signe entre 1,4 et 1,5 :

$$f(1{,}4) = -0{,}04, \qquad f(1{,}5) = 0{,}25.$$

On affine alors le pas, par exemple a 0,01, puis a 0,001. Cette methode fournit un encadrement de plus en plus precis.

5.3 Methode de dichotomie

Une methode plus systematique consiste a partir d'un intervalle $[a, b]$ tel que :

$$f(a)f(b) < 0.$$

On calcule le milieu :

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

On conserve ensuite la moitie de l'intervalle sur laquelle la fonction change de signe. On repete le procede.

Apres n iterations, la longueur de l'intervalle est :

$$\frac{b-a}{2^n}.$$

Le tableur permet de mettre en oeuvre cette methode en calculant successivement les bornes et les milieux.

5.4 Discussion mathematique

Le tableur ne fournit pas, a lui seul, une preuve de l'existence ou de l'unicite de la solution.

Ici, la fonction f est continue sur $[1,2]$ et verifie $f(1) < 0 < f(2)$. Le theoreme des valeurs intermediaires assure donc l'existence d'une solution dans cet intervalle.

De plus, f est strictement croissante sur $[1,2]$, ce qui garantit l'unicite de cette solution.

Il convient egalement de distinguer la precision affichee et la precision mathematiquement garantie.

6 Troisieme exemple : statistique descriptive

6.1 Situation

On releve les notes suivantes obtenues par dix eleves :

$$8,\ 10,\ 12,\ 12,\ 13,\ 14,\ 14,\ 15,\ 16,\ 16.$$

On souhaite calculer la moyenne, la mediane et les valeurs extremes, puis representer les donnees.

6.2 Calculs dans le tableur

On saisit les dix notes dans la plage A2 :A11.

Les formules possibles sont :

- moyenne : `=MOYENNE(A2:A11)` ;
- minimum : `=MIN(A2:A11)` ;
- maximum : `=MAX(A2:A11)` ;
- mediane : `=MEDIANE(A2:A11)`.

La somme des notes est 130. La moyenne vaut donc :

$$\overline{x} = \frac{130}{10} = 13.$$

La mediane est la moyenne des cinquieme et sixieme valeurs :

$$\text{Med} = \frac{13 + 14}{2} = 13{,}5.$$

Le minimum est 8 et le maximum est 16.

6.3 Representation graphique

Le tableur permet de construire :

- un diagramme en batons pour representer les effectifs ;
- un histogramme lorsque les donnees sont regroupees en classes ;
- une representation graphique de l'evolution d'une variable.

Pour un diagramme en batons, on construit d'abord un tableau des valeurs distinctes et de leurs effectifs. La representation facilite la comparaison des distributions.

6.4 Interets et limites

Le tableur automatise les calculs et facilite la comparaison de plusieurs series statistiques. Il permet egalement de traiter des effectifs importants.

Cependant, le choix d'un indicateur depend de la question posee. Une moyenne ne decrit pas, a elle seule, la dispersion des donnees. Il faut donc savoir interpreter les resultats et choisir une representation adaptee.

7 Quatrieme exemple : simulation d'une experience aleatoire

7.1 Situation

On lance un de equilibre a six faces. On cherche a estimer la probabilite d'obtenir un six.

La probabilite theorique est :

$$p = \frac{1}{6}.$$

Une simulation permet d'observer la stabilisation progressive de la frequence lorsque le nombre de lancers augmente.

7.2 Construction de la simulation

Dans la cellule A2, on saisit la formule :

```
=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6).
```

On recopie cette formule sur plusieurs lignes. Chaque cellule simule un lancer.

Dans la colonne B, on indique si le resultat est un six. Par exemple :

```
=SI(A2=6;1;0).
```

La somme des valeurs de la colonne B donne le nombre de six obtenus. La frequence observee apres n lancers est :

$$f_n = \frac{\text{nombre de six observes}}{n}.$$

On peut calculer cette frequence a plusieurs etapes, par exemple apres 10, 100, 500 et 1000 lancers.

7.3 Interpretation

La frequence observee varie d'une simulation a l'autre. Elle ne coincide pas necessairement avec la probabilite theorique.

Le theoreme de la loi des grands nombres indique que, lorsque le nombre de lancers augmente, la frequence converge vers la probabilite theorique presque surement.

Une simulation unique ne suffit pas a demontrer ce resultat. Elle permet toutefois d'en explorer les consequences et de comprendre la fluctuation d'echantillonnage.

7.4 Point de vigilance

Les fonctions aleatoires d'un tableur peuvent recalculer leurs valeurs lorsque la feuille est modifiee. Les resultats affiches peuvent donc changer.

Pour une comparaison rigoureuse, il est utile de conserver les resultats d'une simulation et de preciser les conditions de l'experience numerique.

8 Cinquieme exemple : interets composes

8.1 Probleme

Une personne depose 1000 euros sur un compte remunerant le capital a un taux annuel de 3 %, sans retrait ni versement supplementaire.

On note C_n le capital apres n annees. Le modele est :

$$C_0 = 1000, \qquad C_{n+1} = 1{,}03 C_n.$$

8.2 Mise en oeuvre

On saisit :

- en A2 : 0 ;
- en B2 : 1000 ;
- en A3 : `=A2+1` ;
- en B3 : `=B2*1,03`.

On recopie les formules vers le bas.

On obtient la relation :

$$C_n = 1000 \times 1{,}03^n.$$

On peut alors determiner le premier entier n pour lequel C_n depasse 1500 euros.

La resolution exacte revient a chercher :

$$1000 \times 1{,}03^n > 1500,$$

soit :

$$n > \frac{\ln(1{,}5)}{\ln(1{,}03)}.$$

La valeur du quotient est approximativement 13,72. Le premier nombre entier d'annees satisfaisant la condition est donc 14.

8.3 Interets pedagogiques

Cet exemple permet de travailler :

- la croissance exponentielle ;
- les suites geometriques ;
- la modelisation d'une situation financiere ;
- la recherche d'un seuil a l'aide d'un tableau ;
- le lien entre calcul numerique et resolution algebrique.

On pourra discuter les hypotheses du modele : taux constant, absence de frais, capitalisation annuelle et absence de versements supplementaires.

9 Sixieme exemple : optimisation numerique

9.1 Probleme geometrique

On dispose de 40 metres de cloture pour construire un rectangle. On cherche les dimensions qui maximisent son aire.

Si x designe la longueur d'un cote et y celle du cote adjacent, la contrainte de perimetre s'ecrit :

$$2x + 2y = 40.$$

Ainsi :

$$y = 20 - x, \qquad 0 < x < 20.$$

L'aire est donc :

$$A(x) = x(20 - x).$$

9.2 Exploration avec un tableur

On remplit la colonne A avec des valeurs de x entre 0 et 20. Dans la colonne B, on saisit :

```
=A2*(20-A2).
```

On recopie la formule, puis on recherche la valeur maximale de la colonne B.

Le tableau suggere que l'aire maximale est atteinte pour $x = 10$, avec une aire de 100 metres carres.

9.3 Preuve

On peut etablir ce resultat sans outil numerique :

$$A(x) = x(20 - x) = 100 - (x - 10)^2.$$

Puisque $(x - 10)^2 \geq 0$, on a :

$$A(x) \leq 100.$$

L'egalite est atteinte si et seulement si $x = 10$.

Le rectangle d'aire maximale est donc un carre de cote 10 metres.

9.4 Limite de la methode numerique

Si le tableur ne teste que les valeurs entieres de x, il ne permet pas, en general, d'exclure un maximum situe entre deux valeurs testees. Il faut distinguer le maximum observe sur une grille de valeurs et le maximum mathematique sur un intervalle.

Cet exemple illustre l'interet de combiner exploration numerique, conjecture et demonstration.

10 Dimension algorithmique du tableur

Le tableur peut egalement etre utilise pour mettre en oeuvre un algorithme. Chaque ligne represente alors un etat successif du calcul, et chaque colonne une variable ou une grandeur.

Par exemple, l'algorithme suivant calcule les termes d'une suite definie par recurrence :

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = 2u_n + 3.$$

```
Initialisation :
    u <- 1
    n <- 0

Tant que n < 10 :
    Afficher n et u
    u <- 2*u + 3
    n <- n + 1
Fin Tant que
```

Dans un tableur, la colonne A peut contenir les valeurs de n et la colonne B les valeurs de u_n. La recopie des formules realise l'iteration.

Le tableur permet ainsi d'etablir un lien entre :

- l'algorithme exprime en langage naturel ;
- la formule de calcul ;
- le tableau de valeurs ;
- l'expression mathematique de la suite, lorsqu'elle est accessible.

Pour une suite de recurrence, le tableur facilite l'exploration, mais ne remplace pas l'analyse de la recurrence ni la preuve d'une propriete generale.

11 Bilan didactique

11.1 Apports du tableur

Les exemples precedents mettent en evidence plusieurs fonctions pedagogiques du tableur :

- **Calculer :** automatiser des calculs nombreux ou repetitifs.
- **Representer :** produire tableaux, graphiques et diagrammes.
- **Explorer :** tester des valeurs et observer des tendances.
- **Simuler :** repeter virtuellement une experience aleatoire.
- **Modeliser :** traduire une situation en formules.
- **Conjecturer :** identifier une propriete a examiner.
- **Verifier :** comparer une prediction avec des valeurs numeriques.

11.2 Limites et precautions

L'utilisation du tableur exige plusieurs precautions :

- verifier la validite des formules et des references ;
- controler les unites, les arrondis et le format des cellules ;
- distinguer une valeur approchee d'une valeur exacte ;
- ne pas confondre une observation sur un nombre fini de cas avec une preuve ;
- identifier les hypotheses du modele utilise ;
- interpreter les resultats dans le contexte du probleme.

Il faut egalement veiller a ce que l'outil numerique ne masque pas la structure mathematique du probleme. L'objectif est de developper l'autonomie et le raisonnement, et non de remplacer toute activite de calcul ou de demonstration par un logiciel.

11.3 Evaluation des apprentissages

On peut evaluer les eleves sur leur capacite a :

— construire un tableau pertinent ;
— saisir et recopier correctement une formule ;
— expliquer la signification d'une reference absolue ;
— choisir une representation graphique adaptee ;
— interpreter un resultat et ses limites ;
— formuler une conjecture ;
— fournir une justification mathematique independante du tableur.

12 Liste d'exercices

Exercice 1 – Suite arithmetique

Une entreprise produit initialement 250 objets par jour. Sa production augmente de 15 objets chaque jour.

1. Construire un tableau donnant la production des 30 premiers jours.
2. Ecrire la formule a saisir pour calculer chaque terme.
3. Determiner le premier jour ou la production depasse 500 objets.
4. Retrouver ce resultat par un calcul mathematique.

Exercice 2 – Suite geometrique

Une population de bacteries double toutes les heures. Elle compte initialement 120 bacteries.

1. Construire un tableau de valeurs.
2. Donner une expression de la population apres n heures.
3. Determiner le premier entier n pour lequel la population depasse 100 000.
4. Comparer le resultat numerique et le resultat obtenu a l'aide des logarithmes.

Exercice 3 – Equation et dichotomie

On considere l'equation :

$$x^3 + x - 5 = 0.$$

1. Construire un tableau de valeurs de $f(x) = x^3 + x - 5$.
2. Localiser une solution dans un intervalle de longueur 1.
3. Mettre en oeuvre la methode de dichotomie.
4. Donner un encadrement de la solution d'amplitude inferieure a 10^{-3}.
5. Justifier l'existence et l'unicite de la solution sur l'intervalle choisi.

Exercice 4 – Statistiques

On dispose des temps, en minutes, necessaires a un groupe de personnes pour effectuer un trajet :

$$12,\ 15,\ 18,\ 12,\ 20,\ 17,\ 15,\ 16,\ 12,\ 23,\ 19,\ 15.$$

1. Saisir les donnees dans un tableur.
2. Calculer la moyenne, la mediane, le minimum et le maximum.
3. Construire un diagramme en batons.
4. Comparer cette serie a une autre serie dans laquelle une seule valeur est remplacee par 60.
5. Expliquer pourquoi la moyenne et la mediane ne reagissent pas de la meme facon a cette modification.

Exercice 5 – Simulation probabiliste

On lance deux des equilibres et on s'interesse a la somme obtenue.

1. Simuler un lancer de deux des dans deux cellules.
2. Calculer la somme des deux resultats.
3. Simuler 100, puis 1000 lancers.
4. Estimer la probabilite d'obtenir une somme egale a 7.
5. Determiner cette probabilite par un denombrement exact.
6. Comparer les estimations issues de plusieurs simulations.

Exercice 6 – Comparaison de tarifs

Deux operateurs proposent les tarifs suivants :

— operateur A : abonnement mensuel de 12 euros et 0,05 euro par unite consommee ;
— operateur B : abonnement mensuel de 5 euros et 0,08 euro par unite consommee.

1. Construire un tableau du cout en fonction de la consommation.
2. Determiner graphiquement le seuil a partir duquel A est plus avantageux que B.
3. Retrouver ce seuil par resolution d'une equation.
4. Discuter le choix de l'operateur selon le profil du client.

Exercice 7 – Optimisation

On veut construire un rectangle de perimetre 30 metres.

1. Exprimer une dimension en fonction de l'autre.
2. Construire un tableau donnant l'aire pour plusieurs dimensions.
3. Conjecturer les dimensions du rectangle d'aire maximale.
4. Demontrer le resultat.
5. Expliquer pourquoi une exploration numerique ne suffit pas, en general, a prouver l'optimalite.

Exercice 8 – Approximation de $\sqrt{2}$

On definit une suite par :

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1. Construire un tableau des premiers termes.
2. Comparer les valeurs obtenues avec $\sqrt{2}$.
3. Conjecturer la convergence de la suite.
4. Etudier mathematiquement la relation de recurrence.
5. Discuter la precision numerique et les erreurs d'arrondi.

13 Conclusion

Le tableur est un outil transversal qui permet d'articuler calcul, representation, experimentation et algorithmique.

Les exemples etudies montrent qu'il peut intervenir dans des domaines varies : suites, fonctions, equations, statistiques, probabilites, modelisation financiere et optimisation.

Son interet didactique repose sur une articulation raisonnee entre l'experimentation numerique et l'activite mathematique. Le tableur facilite la recherche et la formulation de conjectures, mais les resultats doivent etre interpretes et, lorsqu'une propriete generale est en jeu, justifies par un raisonnement mathematique.

Pour un oral du CAPES, il est donc important de ne pas presenter une simple succession de manipulations logicielles. Il faut faire apparaitre, pour chaque exemple, le probleme pose, les choix de modelisation, les commandes utilisees, les observations obtenues et la validation mathematique des conclusions.

14 References bibliographiques et sitographiques

Références

[1] Ministere de l'Education nationale, *Programmes d'enseignement de mathematiques*. Bulletin officiel de l'Education nationale. Les programmes applicables doivent etre verifies selon le niveau scolaire et la rentree consideres. https://www.education.gouv.fr/

[2] Eduscol, *Ressources d'accompagnement des programmes de mathematiques*. Ressources relatives a la resolution de problemes, aux representations, au calcul numerique et a l'utilisation des outils informatiques. https://eduscol.education.fr/

[3] B. Capponi, *Le tableur pour le college. Un outil pour l'enseignement des mathematiques*, revue Petit x, IREM de Grenoble. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-52-petit-x/1-le-tableur-pour-le-college-un-outil-pour-l-enseignement-des-mathematiques-516154.kjsp

[4] APMEP, *Publimath : ressources documentaires pour l'enseignement des mathematiques*. Notamment les ressources relatives aux simulations et a la statistique au lycee. https://publimath.fr/

[5] Universite de Bordeaux, *Exemples d'utilisation du tableur – ressource de preparation au CAPES de mathematiques*, expose pedagogique. https://www.math.u-bordeaux.fr/~cmenini/ressourcesCapes/exposeTableur.pdf

[6] The Document Foundation, *Guide Calc de LibreOffice*. Documentation sur les formules, les references de cellules, les fonctions et les graphiques. https://documentation.libreoffice.org/