Leçon pour l'oral du CAPES de mathématiques

Les différents types de raisonnement en mathématiques

Logique, démonstration et résolution de problèmes

Problématique : Comment choisir et mettre en œuvre un raisonnement adapté pour établir une propriété mathématique, construire une démonstration ou résoudre un problème ?

Préparation à l'épreuve orale du CAPES

Table des matières

1 Prérequis, objectifs et problématique **2**
- 1.1 Prérequis . . . 2
- 1.2 Objectifs . . . 2
- 1.3 Problématique . . . 2

2 Le raisonnement direct **2**
- 2.1 Principe . . . 2
- 2.2 Exemple : somme de deux entiers pairs . . . 2
- 2.3 Exemple : inégalité . . . 3
- 2.4 Quand utiliser ce raisonnement ? . . . 3

3 Le raisonnement par contraposition **3**
- 3.1 Principe logique . . . 3
- 3.2 Exemple : carré d'un entier impair . . . 3
- 3.3 Intérêt et précautions . . . 3

4 Le raisonnement par l'absurde **4**
- 4.1 Principe . . . 4
- 4.2 Exemple : irrationalité de $\sqrt{2}$ . . . 4
- 4.3 Différence avec la contraposition . . . 4

5 Le raisonnement par disjonction des cas **4**
- 5.1 Principe . . . 4
- 5.2 Exemple : valeur absolue . . . 4
- 5.3 Exemple : divisibilité . . . 5
- 5.4 Applications . . . 5

6 Le raisonnement par récurrence **5**
- 6.1 Principe . . . 5
- 6.2 Exemple : somme des premiers entiers . . . 5
- 6.3 Exemple : inégalité . . . 6
- 6.4 Récurrence forte . . . 6

7 Le raisonnement par équivalence **6**
- 7.1 Principe . . . 6
- 7.2 Exemple : résolution d'une équation . . . 6
- 7.3 Précautions . . . 7

8 Le raisonnement par analyse-synthèse **7**
- 8.1 Principe . . . 7
- 8.2 Exemple : résolution d'une équation . . . 7
- 8.3 Intérêt . . . 7

9 Le raisonnement par l'exemple et le contre-exemple **8**
- 9.1 Conjecturer à partir d'exemples . . . 8
- 9.2 Le contre-exemple . . . 8
- 9.3 Exemple . . . 8
- 9.4 Limites de la méthode . . . 8

10 Le raisonnement par l'absurde et la contraposée : deux méthodes à distinguer **8**

11 Le raisonnement probabiliste et le raisonnement par dénombrement **9**
11.1 Dénombrement 9
11.2 Exemple : nombre de sous-ensembles 9
11.3 Raisonnement probabiliste 9

12 Choisir un raisonnement adapté **9**

13 Enjeux didactiques et erreurs fréquentes **10**
13.1 De la conjecture à la démonstration 10
13.2 Erreurs fréquentes 10
13.3 Pistes pédagogiques 11

14 Exercices proposés **11**

15 Éléments de correction des exercices **13**

16 Conclusion **14**

17 Références bibliographiques **15**

1 Prérequis, objectifs et problématique

1.1 Prérequis

La leçon suppose une connaissance élémentaire :

— des connecteurs logiques : *et*, *ou*, *non*, *implique*, *équivaut à* ;

— des quantificateurs universel et existentiel ;

— des ensembles de nombres usuels et des opérations arithmétiques ;

— des propriétés élémentaires de l'algèbre, de la géométrie et des fonctions ;

— du principe d'une démonstration mathématique.

1.2 Objectifs

À l'issue de cette leçon, on souhaite être capable :

— de distinguer une conjecture d'une proposition démontrée ;

— d'identifier les principaux types de raisonnement ;

— de rédiger une démonstration rigoureuse ;

— de choisir une méthode adaptée à la structure de l'énoncé ;

— de repérer les erreurs logiques fréquentes ;

— de mettre en relation ces méthodes avec les programmes scolaires et la résolution de problèmes.

1.3 Problématique

Le raisonnement mathématique ne se réduit pas à l'application de calculs. Il consiste à établir des liens logiques entre des hypothèses, des propriétés déjà connues et une conclusion.

Selon la forme de l'énoncé, plusieurs stratégies sont possibles : raisonnement direct, contraposition, raisonnement par l'absurde, disjonction des cas, récurrence, analyse-synthèse ou encore raisonnement par équivalence.

Ces méthodes ne sont pas toutes interchangeables. Leur choix dépend notamment de la présence de quantificateurs, de la nature de la conclusion et de la structure des hypothèses.

2 Le raisonnement direct

2.1 Principe

Pour démontrer une implication

$$P \Longrightarrow Q,$$

on suppose que la proposition P est vraie, puis on déduit logiquement la proposition Q à l'aide de définitions, de propriétés connues et de calculs justifiés.

La démonstration suit donc le sens de l'implication : des hypothèses vers la conclusion.

2.2 Exemple : somme de deux entiers pairs

Propriété 2.1. *La somme de deux entiers pairs est un entier pair.*

Démonstration. Soient a et b deux entiers pairs.

Il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que

$$a = 2k, \qquad b = 2\ell.$$

Par conséquent,

$$a + b = 2k + 2\ell = 2(k + \ell).$$

Comme $k + \ell \in \mathbb{Z}$, le nombre $a + b$ est pair. □

2.3 Exemple : inégalité

Propriété 2.2. *Pour tout réel $x \geq 0$, on a*

$$x^2 + 1 \geq 1.$$

Démonstration. Puisque $x \geq 0$, on a $x^2 \geq 0$. En ajoutant 1 aux deux membres, on obtient

$$x^2 + 1 \geq 1.$$

□

2.4 Quand utiliser ce raisonnement ?

Le raisonnement direct est à privilégier lorsque les hypothèses fournissent naturellement les éléments nécessaires à la conclusion. Il constitue souvent la méthode la plus lisible.

3 Le raisonnement par contraposition

3.1 Principe logique

L'implication

$$P \Longrightarrow Q$$

est logiquement équivalente à

$$\neg Q \Longrightarrow \neg P.$$

La seconde implication est appelée *contraposée* de la première.

Pour démontrer $P \Longrightarrow Q$, on peut donc supposer que Q est fausse et démontrer que P est fausse.

3.2 Exemple : carré d'un entier impair

Propriété 3.1. *Si le carré d'un entier n est pair, alors n est pair.*

Démonstration. Démontrons la contraposée : si n est impair, alors n^2 est impair.

Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

Alors

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Le carré de n est donc impair.

La contraposée étant démontrée, la proposition initiale l'est également. □

3.3 Intérêt et précautions

La contraposition est particulièrement utile lorsque la négation de la conclusion possède une structure simple.

Il faut la distinguer de la réciproque :

$$P \Longrightarrow Q \qquad \text{et} \qquad Q \Longrightarrow P.$$

La réciproque n'est pas automatiquement vraie.

Par exemple, si n est pair, alors n^2 est pair. La réciproque est également vraie dans cet exemple, mais ce n'est pas une propriété générale des implications.

4 Le raisonnement par l'absurde

4.1 Principe

Pour démontrer une proposition P, on suppose que P est fausse et on cherche à obtenir une contradiction avec une propriété établie, une hypothèse ou un résultat logique.

On conclut que P est vraie.

4.2 Exemple : irrationalité de $\sqrt{2}$

Théorème 4.1. *Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

Démonstration. Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ soit rationnel.

Il existe alors deux entiers p, q, avec $q \neq 0$, premiers entre eux, tels que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

En élevant au carré, on obtient

$$p^2 = 2q^2.$$

Ainsi, p^2 est pair. D'après le résultat précédent, p est pair. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$.

En substituant,

$$4k^2 = 2q^2, \qquad \text{donc} \qquad q^2 = 2k^2.$$

Le nombre q^2, puis q, sont pairs.

Les entiers p et q sont donc tous deux pairs, ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux.

L'hypothèse initiale est fausse. Par conséquent, $\sqrt{2}$ est irrationnel. □

4.3 Différence avec la contraposition

La contraposition transforme une implication en une implication équivalente. Le raisonnement par l'absurde suppose la négation de ce que l'on veut établir et en déduit une contradiction.

Les deux méthodes sont liées, mais elles ne sont pas présentées de la même manière dans une rédaction.

5 Le raisonnement par disjonction des cas

5.1 Principe

Lorsque plusieurs situations couvrent toutes les possibilités, on peut démontrer séparément la propriété dans chacun des cas.

Si

$$P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$$

est toujours vraie et si chaque cas P_i entraîne Q, alors Q est vraie.

5.2 Exemple : valeur absolue

Propriété 5.1. *Pour tout réel x,*

$$|x| \geq 0.$$

Démonstration. Deux cas sont possibles.

- Si $x \geq 0$, alors $|x| = x \geq 0$.
- Si $x < 0$, alors $|x| = -x > 0$.

Dans les deux cas, $|x| \geq 0$. □

5.3 Exemple : divisibilité

Propriété 5.2. *Pour tout entier n, le produit $n(n+1)$ est pair.*

Démonstration. Tout entier est pair ou impair.

— Si n est pair, alors $n(n+1)$ est pair.

— Si n est impair, alors $n+1$ est pair, donc $n(n+1)$ est pair.

La propriété est donc vraie dans tous les cas. □

5.4 Applications

La disjonction des cas intervient notamment :

— dans l'étude du signe d'une expression ;

— dans les démonstrations concernant la parité ;

— pour les fonctions définies par morceaux ;

— dans les problèmes faisant intervenir des configurations géométriques distinctes.

Il est indispensable de justifier que les cas envisagés couvrent toutes les possibilités.

6 Le raisonnement par récurrence

6.1 Principe

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer une propriété $P(n)$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Il comporte trois étapes :

1. **Initialisation :** démontrer $P(n_0)$.
2. **Hérédité :** démontrer que, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$.
3. **Conclusion :** en déduire que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

L'initialisation et l'hérédité sont toutes deux nécessaires.

6.2 Exemple : somme des premiers entiers

Théorème 6.1. *Pour tout entier $n \geq 1$,*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Posons

$$P(n) : \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Initialisation.

Pour $n = 1$,

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité.

Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$. Alors

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On ajoute $n+1$ aux deux membres :

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

C'est précisément $P(n+1)$.

Conclusion.

Par récurrence, la formule est vraie pour tout entier $n \geq 1$. □

6.3 Exemple : inégalité

On peut également démontrer par récurrence que

$$2^n \geq n+1 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

L'initialisation au rang 0 est immédiate : $2^0 = 1 \geq 1$.

Supposons $2^n \geq n+1$. Alors

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n+1) \geq n+2,$$

car $n \geq 0$.

La propriété est donc héréditaire et vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.4 Récurrence forte

Dans une récurrence forte, on suppose la propriété vraie pour tous les rangs précédents, puis on démontre qu'elle est vraie au rang suivant.

Cette variante est utile lorsque l'étape d'hérédité nécessite plusieurs valeurs antérieures, par exemple dans certaines démonstrations de divisibilité ou de décomposition en facteurs premiers.

7 Le raisonnement par équivalence

7.1 Principe

Pour établir une équivalence entre deux propositions P et Q, il faut démontrer les deux implications :

$$P \Longrightarrow Q \qquad \text{et} \qquad Q \Longrightarrow P.$$

On peut également enchaîner des équivalences :

$$P \Longleftrightarrow P_1 \Longleftrightarrow P_2 \Longleftrightarrow Q,$$

à condition que chaque transformation soit effectivement réversible.

7.2 Exemple : résolution d'une équation

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

On a les équivalences

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 = 0 &\Longleftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x-2 = 0 \quad \text{ou} \quad x-3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 3. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$S = \{2, 3\}.$$

7.3 Précautions

Certaines opérations ne préservent pas les équivalences.
Par exemple,

$$x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4,$$

mais

$$x^2 = 4 \not\Longrightarrow x = 2,$$

puisque $x = -2$ est également solution.

De même, diviser par une expression susceptible de s'annuler peut faire perdre des solutions. Il faut alors traiter séparément le cas où cette expression est nulle.

8 Le raisonnement par analyse-synthèse

8.1 Principe

L'analyse-synthèse est particulièrement adaptée aux problèmes de construction, de recherche d'antécédents ou de détermination d'objets satisfaisant certaines conditions.

— **Analyse :** on suppose qu'une solution existe et on détermine les conditions nécessaires qu'elle doit vérifier.

— **Synthèse :** on vérifie que les objets obtenus satisfont effectivement les conditions du problème.

L'analyse permet de dégager des candidats ; elle ne prouve pas, à elle seule, leur existence.

8.2 Exemple : résolution d'une équation

Cherchons les réels x tels que

$$\sqrt{x+1} = x - 1.$$

Analyse.
Une racine carrée étant positive, il faut $x - 1 \geq 0$, donc $x \geq 1$.
En élevant au carré, on obtient

$$x + 1 = (x-1)^2,$$

soit

$$x^2 - 3x = 0, \qquad \text{donc} \qquad x = 0 \text{ ou } x = 3.$$

La condition $x \geq 1$ ne conserve que le candidat $x = 3$.
Synthèse.
Pour $x = 3$,

$$\sqrt{3+1} = 2 = 3 - 1.$$

Cette valeur est bien solution.
Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$S = \{3\}.$$

8.3 Intérêt

Cette méthode évite de confondre les conditions nécessaires obtenues pendant les calculs et les conditions suffisantes permettant de conclure.

9 Le raisonnement par l'exemple et le contre-exemple

9.1 Conjecturer à partir d'exemples

L'étude de cas particuliers peut permettre de formuler une conjecture.
Par exemple, les calculs

$$1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 9, \quad 4^2 = 16$$

peuvent conduire à rechercher des propriétés générales sur les carrés des entiers.

Toutefois, un nombre fini d'exemples ne suffit généralement pas à démontrer une proposition universelle.

9.2 Le contre-exemple

Définition 9.1. *Un contre-exemple est un objet qui vérifie les hypothèses d'une proposition mais pour lequel la conclusion annoncée est fausse.*

Un seul contre-exemple suffit à réfuter une proposition universelle.

9.3 Exemple

Considérons l'affirmation :

Le carré de tout nombre réel est supérieur ou égal à ce nombre.

Cette affirmation est fausse. En prenant $x = \frac{1}{2}$, on a

$$x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = x.$$

Ce contre-exemple réfute l'affirmation.

9.4 Limites de la méthode

Un exemple vérifiant une propriété ne suffit pas à démontrer qu'elle est toujours vraie. En revanche, un contre-exemple bien choisi suffit à démontrer qu'une propriété universelle est fausse.

La recherche de contre-exemples constitue donc un outil important pour tester les conjectures et mieux comprendre leurs hypothèses.

10 Le raisonnement par l'absurde et la contraposée : deux méthodes à distinguer

Il est utile de comparer ces deux démarches, souvent confondues par les élèves.
Pour démontrer $P \Longrightarrow Q$:

— par contraposition, on suppose $\neg Q$ et on démontre $\neg P$;

— par l'absurde, on suppose P et $\neg Q$ simultanément, puis on établit une contradiction.

Ces méthodes sont logiquement équivalentes dans la logique classique, mais elles peuvent présenter des avantages pédagogiques différents selon le problème.

La contraposition met en évidence une implication équivalente. Le raisonnement par l'absurde met l'accent sur l'impossibilité de la situation supposée.

11 Le raisonnement probabiliste et le raisonnement par dénombrement

11.1 Dénombrement

Le dénombrement consiste à déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble fini en organisant les possibilités, en utilisant des arbres, des tableaux ou des formules combinatoires.

Il peut servir à établir une propriété générale, à condition que la méthode de comptage couvre bien tous les cas sans omission ni double comptage.

11.2 Exemple : nombre de sous-ensembles

Un ensemble à n éléments possède 2^n sous-ensembles.

En effet, pour chaque élément, deux choix sont possibles : l'inclure ou ne pas l'inclure dans le sous-ensemble considéré. Le principe multiplicatif conduit donc à 2^n possibilités.

11.3 Raisonnement probabiliste

En probabilités, on peut comparer des événements, exploiter l'indépendance, conditionner une probabilité ou calculer une espérance.

Il faut cependant distinguer une affirmation probabiliste d'une affirmation certaine. Observer un événement fréquent dans des simulations ne constitue pas, à lui seul, une preuve de sa probabilité exacte.

Par exemple, la simulation d'un grand nombre de lancers d'une pièce équilibrée peut illustrer la stabilisation des fréquences, mais la justification mathématique repose sur les propriétés du modèle probabiliste.

12 Choisir un raisonnement adapté

Le choix d'une méthode peut être guidé par la forme de l'énoncé.

Structure du problème	Méthode possible	Question à se poser
Une implication $P \Rightarrow Q$	Raisonnement direct	Les hypothèses permettent-elles de construire directement la conclusion ?
Une implication dont la conclusion est difficile à exploiter	Contraposition	La négation de la conclusion est-elle plus simple à traiter ?
Une affirmation d'impossibilité ou d'irrationalité	Raisonnement par l'absurde	La négation de l'affirmation conduit-elle à une contradiction ?
Plusieurs cas exhaustifs	Disjonction des cas	Ai-je traité toutes les possibilités ?
Une propriété dépendant d'un entier naturel	Récurrence	Puis-je établir l'initialisation et l'hérédité ?
Une équation ou une équivalence	Raisonnement par équivalence	Chaque transformation est-elle réversible ?
Un problème de construction	Analyse-synthèse	Les candidats obtenus vérifient-ils réellement les conditions ?
Une conjecture universelle	Recherche d'un contre-exemple	Un cas particulier suffit-il à réfuter l'affirmation ?

Ce tableau est un outil d'orientation et non une classification rigide. Plusieurs raisonnements peuvent être combinés au sein d'une même démonstration.

13 Enjeux didactiques et erreurs fréquentes

13.1 De la conjecture à la démonstration

L'activité mathématique comprend souvent plusieurs étapes :

1. expérimenter ou calculer des exemples ;
2. formuler une conjecture ;
3. rechercher une stratégie de démonstration ;
4. rédiger une preuve rigoureuse ;
5. examiner la portée et les limites du résultat.

Les outils numériques, notamment les logiciels de géométrie dynamique et les tableurs, peuvent contribuer aux premières étapes. Ils ne remplacent pas nécessairement une démonstration lorsqu'une preuve générale est demandée.

13.2 Erreurs fréquentes

— **Confondre implication et équivalence.** Une implication ne peut pas être remplacée sans justification par sa réciproque.

— **Généraliser à partir de quelques exemples.** Une série de vérifications ne démontre pas une propriété portant sur tous les éléments d'un ensemble infini.

— **Oublier une hypothèse.** Une propriété peut devenir fausse si l'on supprime une condition essentielle.

— **Omettre l'initialisation en récurrence.** L'hérédité seule ne suffit pas à établir le résultat.

— **Négliger les conditions de calcul.** Une division par zéro ou une élévation au carré peuvent introduire des erreurs ou des solutions parasites.

— **Présenter une analyse comme une preuve complète.** Les candidats trouvés doivent être vérifiés.

13.3 Pistes pédagogiques

Au collège et au lycée, l'enseignement du raisonnement peut s'appuyer sur :

— la comparaison de démonstrations différentes d'un même résultat ;

— l'analyse d'affirmations fausses et la recherche de contre-exemples ;

— le passage progressif d'une conjecture à une preuve ;

— la rédaction collective de démonstrations ;

— l'utilisation raisonnée de logiciels et de simulations.

L'objectif n'est pas seulement de reconnaître le nom d'une méthode, mais de savoir pourquoi elle permet de conclure.

14 Exercices proposés

Les exercices suivants permettent de mettre en pratique les différentes méthodes présentées. Ils peuvent être utilisés pour un entraînement individuel ou une séance de travaux dirigés.

Exercice 1 – Raisonnement direct

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Démontrer que si a et b sont impairs, alors $a + b$ est pair.
Préciser les définitions utilisées.

Exercice 2 – Contraposition

Démontrer que, pour tout entier n, si n^2 est divisible par 3, alors n est divisible par 3.
Indication : raisonner par contraposée en distinguant les restes possibles de n modulo 3.

Exercice 3 – Raisonnement par l'absurde

Démontrer qu'il n'existe pas de plus petit nombre réel strictement positif.
Indication : supposer qu'un tel nombre a existe et considérer $a/2$.

Exercice 4 – Disjonction des cas

Démontrer que, pour tout entier n, le nombre $n^2 + n$ est pair.
Rédiger la preuve en distinguant les cas où n est pair et où n est impair.

Exercice 5 – Récurrence

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Identifier explicitement l'initialisation, l'hérédité et la conclusion.

Exercice 6 – Raisonnement par équivalence

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Présenter la résolution sous forme d'une chaîne d'équivalences justifiées.

Exercice 7 – Analyse-synthèse

Déterminer les réels x vérifiant

$$\sqrt{2x+3} = x.$$

Commencer par déterminer les conditions nécessaires, puis vérifier les solutions candidates.

Exercice 8 – Contre-exemple

Réfuter les affirmations suivantes :

1. Le produit de deux nombres irrationnels est toujours irrationnel.
2. Toute fonction croissante est strictement croissante.
3. Si $a^2 = b^2$, alors $a = b$.

Pour chaque affirmation, proposer un contre-exemple explicite.

Exercice 9 – Conjecture et preuve

À l'aide de plusieurs calculs, conjecturer une formule pour la somme

$$1 + 2 + \cdots + n.$$

Démontrer ensuite cette formule par récurrence.
Expliquer la différence entre les calculs expérimentaux et la preuve.

Exercice 10 – Choix de méthode

Pour chacune des propositions suivantes, proposer une méthode de démonstration et justifier le choix :

1. La somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5.
2. Si n^2 est impair, alors n est impair.
3. Le nombre $\sqrt{3}$ est irrationnel.
4. Pour tout entier $n \geq 0$, $2^n \geq n + 1$.
5. L'équation $x^2 = 9$ possède exactement deux solutions réelles.

Exercice 11 – Erreurs de raisonnement

Un élève écrit :

$$x^2 = 4 \Longrightarrow x = 2.$$

Expliquer l'erreur et proposer une rédaction correcte de la résolution de l'équation $x^2 = 4$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12 – Approfondissement

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $n^3 - n$ est divisible par 6.
Indication :

$$n^3 - n = (n-1)n(n+1).$$

Étudier la divisibilité par 2 et par 3, puis conclure en justifiant le passage à la divisibilité par 6.

15 Éléments de correction des exercices

Exercice 1

Il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 2k+1$ et $b = 2\ell + 1$. Ainsi,

$$a + b = 2(k + \ell + 1),$$

donc $a + b$ est pair.

Exercice 2

Si n n'est pas divisible par 3, alors $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$. Dans le premier cas,

$$n^2 = 9k^2 + 6k + 1,$$

et dans le second,

$$n^2 = 9k^2 + 12k + 4.$$

Dans les deux cas, n^2 n'est pas divisible par 3. La contraposée est démontrée.

Exercice 3

Supposons qu'il existe un plus petit réel strictement positif a. Le réel $a/2$ est strictement positif et vérifie $a/2 < a$, ce qui contredit la minimalité de a.

Exercice 4

Si n est pair, $n^2 + n$ est pair. Si n est impair, $n + 1$ est pair ; le produit $n(n+1)$ est donc pair.

Exercice 5

Pour $n = 1$, on a $1 = 1^2$. Supposons la formule vraie au rang n. Alors

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

La formule est vraie par récurrence.

Exercice 6

On factorise :

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

L'équation équivaut à

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 3.$$

Ainsi, $S = \{1, 3\}$.

Exercice 7

La racine carrée impose $x \geq 0$. En élevant au carré,

$$2x + 3 = x^2 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x-3)(x+1) = 0.$$

Les candidats sont 3 et -1. Seul 3 respecte la condition $x \geq 0$, et il vérifie l'équation initiale. Donc $S = \{3\}$.

Exercice 8

On peut choisir :

1. $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$;
2. la fonction constante $f(x) = 0$;
3. $a = 1$ et $b = -1$, puisque $a^2 = b^2$ mais $a \neq b$.

Exercice 9

Les premiers calculs suggèrent

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La formule se démontre par récurrence, comme dans la section consacrée à cette méthode.

Exercice 10

1. Raisonnement direct à partir de la définition d'un multiple de 5.
2. Contraposition : un entier pair a un carré pair.
3. Raisonnement par l'absurde, en supposant $\sqrt{3} = p/q$ sous forme irréductible.
4. Récurrence sur n.
5. Factorisation $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$, puis résolution par équivalences.

Exercice 11

L'équation $x^2 = 4$ équivaut à

$$(x-2)(x+2) = 0,$$

donc $x = 2$ ou $x = -2$. L'erreur consiste à oublier la seconde solution.

Exercice 12

Parmi trois entiers consécutifs $n-1, n, n+1$, l'un est divisible par 3 et au moins l'un est pair. Leur produit est donc divisible par 2 et par 3. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, ce produit est divisible par 6.

16 Conclusion

Les différents types de raisonnement constituent des outils complémentaires au service de la démonstration mathématique.

Le raisonnement direct permet de déduire la conclusion à partir des hypothèses. La contraposition et l'absurde exploitent les négations logiques. La disjonction des cas organise les situations

possibles. La récurrence traite les propriétés indexées par les entiers. Le raisonnement par équivalence et l'analyse-synthèse sont particulièrement utiles pour résoudre des équations ou des problèmes de construction.

Enfin, les exemples et les contre-exemples jouent un rôle essentiel dans la formulation et la réfutation des conjectures.

L'enjeu de l'enseignement est de faire acquérir aux élèves non seulement des méthodes de preuve, mais aussi la capacité à choisir une stratégie, à en justifier chaque étape et à rédiger une démonstration rigoureuse.

17 Références bibliographiques

Références

[1] Euclide, *Les Éléments*. Ouvrage fondateur de la démonstration déductive en géométrie.

[2] George Pólya, *How to Solve It : A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, 1945. Ouvrage classique sur les stratégies de résolution de problèmes.

[3] Jean-Louis Chabert (dir.), *Histoire d'algorithmes : du caillou à la puce*, Belin, 1994. Pour replacer certaines démarches mathématiques dans leur contexte historique et algorithmique.

[4] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du collège et du lycée*. Bulletins officiels et ressources d'accompagnement disponibles sur le site Éduscol : https://eduscol.education.fr/.

[5] Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM), *Ressources pour l'enseignement des mathématiques*. Publications consacrées à la démonstration, à la logique et à la résolution de problèmes. https://www.univ-irem.fr/.

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Sujets et rapports de jury du CAPES externe de mathématiques*. Ressources officielles relatives aux attentes des épreuves : https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.