Applications des mathématiques à d'autres disciplines

Leçon d'oral de CAPES de mathématiques

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Prérequis et objectifs **2**
- 2.1 Prérequis . . . 2
- 2.2 Objectifs . . . 2

3 Modéliser une situation réelle **3**
- 3.1 Le principe de modélisation . . . 3
- 3.2 Exemple : évolution d'une population . . . 3

4 Applications à la physique **3**
- 4.1 Mouvement rectiligne uniforme . . . 3
- 4.2 Chute libre et fonction quadratique . . . 4
- 4.3 Électricité : loi d'Ohm . . . 4
- 4.4 Intérêt pédagogique . . . 4

5 Applications à la biologie et à la médecine **5**
- 5.1 Croissance exponentielle . . . 5
- 5.2 Modèle logistique . . . 5
- 5.3 Probabilités et tests médicaux . . . 5
- 5.4 Précautions d'interprétation . . . 6

6 Applications à l'économie et à la gestion **6**
- 6.1 Coût, recette et bénéfice . . . 6
- 6.2 Optimisation d'un bénéfice . . . 6
- 6.3 Intérêts composés . . . 7

7 Applications à l'informatique **7**
- 7.1 Algorithmique et calcul numérique . . . 7
- 7.2 Exemple : méthode de dichotomie . . . 7
- 7.3 Complexité des algorithmes . . . 8

8 Applications à la géographie et à la cartographie **8**
- 8.1 Échelles et proportionnalité . . . 8
- 8.2 Coordonnées et systèmes de projection . . . 8
- 8.3 Distances dans un repère . . . 8

9 Applications aux sciences sociales **9**
- 9.1 Statistiques descriptives . . . 9
- 9.2 Corrélation et causalité . . . 9
- 9.3 Régression linéaire . . . 9

10 Applications à la chimie et aux sciences de l'environnement **9**
10.1 Concentrations et dilutions 9
10.2 Décroissance radioactive 10
10.3 Bilan environnemental 10

11 Enjeux didactiques et pédagogiques **10**
11.1 Donner du sens aux notions mathématiques 10
11.2 Construire une activité interdisciplinaire 11
11.3 Place des outils numériques 11
11.4 Points de vigilance 11

12 Conclusion **11**

13 Liste d'exercices **12**

14 Références bibliographiques et institutionnelles **14**

1 Introduction

Les mathématiques entretiennent depuis leur origine des relations étroites avec les autres sciences. Historiquement, elles se sont développées en réponse à des problèmes concrets : mesurer des surfaces, prévoir des phénomènes astronomiques, construire des ouvrages ou organiser des échanges commerciaux.

Aujourd'hui, les mathématiques constituent un outil essentiel pour modéliser, comprendre et prévoir des phénomènes issus de disciplines aussi variées que la physique, la biologie, l'économie, l'informatique, la géographie ou les sciences humaines.

Une application des mathématiques à une autre discipline consiste à traduire une situation en objets mathématiques, à étudier ces objets, puis à interpréter les résultats obtenus dans le contexte initial.

Cette démarche repose sur plusieurs étapes :

1. observer et comprendre une situation ;
2. identifier les grandeurs pertinentes ;
3. formuler des hypothèses simplificatrices ;
4. construire un modèle mathématique ;
5. résoudre le problème dans le modèle ;
6. interpréter et valider les résultats ;
7. discuter les limites du modèle.

L'objectif n'est donc pas seulement de calculer, mais de comprendre ce que les mathématiques permettent d'affirmer sur le monde réel.

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

La leçon mobilise des connaissances mathématiques de plusieurs domaines :

— calcul numérique et littéral ;
— proportionnalité et pourcentages ;
— fonctions usuelles, notamment affines, polynomiales et exponentielles ;
— dérivation et étude des variations ;
— probabilités et statistiques descriptives ;
— géométrie plane et dans l'espace ;
— suites numériques et algorithmique ;
— résolution d'équations et de systèmes linéaires.

Le niveau de mobilisation de ces notions dépend de la discipline étudiée et du public auquel la leçon s'adresse.

2.2 Objectifs

À l'issue de cette leçon, on souhaite être capable de :

— identifier des situations dans lesquelles les mathématiques interviennent dans d'autres disciplines ;
— construire et exploiter un modèle mathématique simple ;
— choisir des outils adaptés à une situation donnée ;
— interpréter un résultat numérique ou théorique ;

— évaluer la pertinence des hypothèses d'un modèle ;

— montrer le rôle des mathématiques dans une démarche scientifique interdisciplinaire ;

— proposer des activités permettant aux élèves de donner du sens aux notions étudiées.

3 Modéliser une situation réelle

3.1 Le principe de modélisation

Un modèle mathématique est une représentation simplifiée d'une situation réelle. Il ne reproduit pas nécessairement tous les aspects du phénomène : il retient ceux qui sont pertinents pour répondre à une question donnée.

On peut représenter la démarche par le schéma suivant :

$$\boxed{\text{Situation réelle}} \longrightarrow \boxed{\text{Modèle mathématique}} \longrightarrow \boxed{\text{Résolution}} \longrightarrow \boxed{\text{Interprétation}}$$

La construction d'un modèle nécessite des hypothèses. Celles-ci doivent être explicitées et leur influence sur les conclusions doit être examinée.

3.2 Exemple : évolution d'une population

On suppose qu'une population de bactéries double toutes les heures. Si elle compte initialement N_0 bactéries et si le modèle reste valable, alors :

$$N(t) = N_0\, 2^t,$$

où t désigne le temps exprimé en heures.

Pour $N_0 = 500$, on obtient :

$$N(3) = 500 \times 2^3 = 4000.$$

Le modèle prévoit donc une population de 4000 bactéries après trois heures.

Cependant, cette croissance ne peut pas se poursuivre indéfiniment dans un milieu réel. Les ressources disponibles, la température et les déchets métaboliques peuvent modifier le rythme de multiplication.

Cet exemple montre la distinction entre un calcul exact dans un modèle et une prévision nécessairement limitée dans la réalité.

4 Applications à la physique

4.1 Mouvement rectiligne uniforme

En physique, les mathématiques permettent de décrire quantitativement le mouvement des objets.

Dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme, la position $x(t)$ d'un mobile est donnée par :

$$x(t) = x_0 + vt,$$

où :

— x_0 est la position initiale ;

— v est la vitesse constante ;

— t est le temps écoulé.

La fonction x est affine. Son coefficient directeur est la vitesse v.

Exemple 1. *Un cycliste se déplace à vitesse constante de* 18 km/h. *Il parcourt une distance :*

$$d(t) = 18t,$$

où t est exprimé en heures et $d(t)$ en kilomètres.

Pour parcourir 45 km*, il lui faut :*

$$t = \frac{45}{18} = 2{,}5 \text{ h}.$$

La durée correspond à deux heures et trente minutes.

4.2 Chute libre et fonction quadratique

Dans un modèle simplifié de chute libre, sans résistance de l'air, la distance parcourue par un objet lâché sans vitesse initiale est :

$$d(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

où g désigne l'intensité de la pesanteur.

Sur Terre, on utilise approximativement $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$.

Après deux secondes :

$$d(2) = \frac{1}{2} \times 9{,}81 \times 4 = 19{,}62\,\text{m}.$$

La fonction quadratique traduit ici une accélération constante.

4.3 Électricité : loi d'Ohm

La loi d'Ohm s'écrit :

$$U = RI,$$

où U est la tension électrique, R la résistance et I l'intensité du courant.

Pour une résistance constante, la tension est une fonction linéaire de l'intensité.

Si $R = 100\,\Omega$ et $I = 0{,}02\,\text{A}$, alors :

$$U = 100 \times 0{,}02 = 2\,\text{V}.$$

La représentation graphique de U en fonction de I est une droite passant par l'origine, dont le coefficient directeur est la résistance.

4.4 Intérêt pédagogique

Ces exemples permettent de travailler :

- les fonctions affines et quadratiques ;
- les unités et les changements d'unités ;
- la lecture et la construction de graphiques ;
- l'interprétation d'un coefficient directeur ;
- le contrôle de la cohérence des résultats.

5 Applications à la biologie et à la médecine

5.1 Croissance exponentielle

Lorsque le taux de croissance instantané d'une population est proportionnel à son effectif, on peut utiliser l'équation différentielle :

$$N'(t) = rN(t),$$

où r est un taux de croissance constant.

Avec la condition initiale $N(0) = N_0$, la solution est :

$$N(t) = N_0 e^{rt}.$$

Ce modèle peut décrire, sur une période limitée, la croissance d'une population de microorganismes dans des conditions favorables.

5.2 Modèle logistique

Pour prendre en compte une limitation des ressources, on peut utiliser le modèle logistique :

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right),$$

où K représente la capacité limite du milieu.

Lorsque $N(t)$ est petit devant K, la croissance est proche d'une croissance exponentielle. Lorsque la population approche K, la croissance ralentit.

Ce modèle permet d'introduire le lien entre équations différentielles, fonctions et phénomènes biologiques.

5.3 Probabilités et tests médicaux

Les probabilités permettent d'étudier la fiabilité d'un test de dépistage.

Considérons une maladie touchant 1 % d'une population. Un test possède :

— une sensibilité de 99 % ;

— une spécificité de 95 %.

On note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

Les données donnent :

$$P(M) = 0{,}01, \qquad P(T \mid M) = 0{,}99,$$

et

$$P(T \mid \overline{M}) = 0{,}05.$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \mid M)P(M) \\ &\quad + P(T \mid \overline{M})P(\overline{M}) \\ &= 0{,}99 \times 0{,}01 + 0{,}05 \times 0{,}99 \\ &= 0{,}0594. \end{aligned}$$

La formule de Bayes donne alors :

$$P(M \mid T) = \frac{P(T \mid M)P(M)}{P(T)} = \frac{0{,}0099}{0{,}0594} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi, dans cette population et avec ces caractéristiques de test, la probabilité d'être malade sachant que le test est positif est d'environ 16,7 %.

Ce résultat ne signifie pas que le test est inutile. Il montre que l'interprétation d'un résultat positif dépend aussi de la fréquence de la maladie dans la population testée.

5.4 Précautions d'interprétation

Un modèle biologique ou médical ne remplace pas l'observation expérimentale. Les données peuvent être incertaines, les paramètres varier et les conditions réelles différer des hypothèses retenues.

Il convient donc de distinguer :

— les données observées ;

— les hypothèses du modèle ;

— les résultats mathématiques ;

— les conclusions applicables à la situation réelle.

6 Applications à l'économie et à la gestion

6.1 Coût, recette et bénéfice

Une entreprise produit et vend une quantité q d'objets. On suppose que son coût total est :

$$C(q) = 500 + 12q,$$

et que chaque objet est vendu 20 euros.

La recette est donc :

$$R(q) = 20q.$$

Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût :

$$B(q) = R(q) - C(q) = 8q - 500.$$

Le seuil de rentabilité est atteint lorsque :

$$B(q) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 8q = 500 \quad \Longleftrightarrow \quad q = 62{,}5.$$

Si les quantités produites doivent être entières, l'entreprise doit vendre au moins 63 objets pour obtenir un bénéfice positif dans ce modèle.

6.2 Optimisation d'un bénéfice

Supposons maintenant que le bénéfice soit modélisé par :

$$B(q) = -2q^2 + 120q - 1000,$$

pour q appartenant à un intervalle de production admissible.

La dérivée est :

$$B'(q) = -4q + 120.$$

On a :

$$B'(q) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q = 30.$$

Comme le coefficient du terme quadratique est négatif, la fonction atteint son maximum en $q = 30$.

Le bénéfice maximal prévu par ce modèle vaut :

$$B(30) = -2 \times 900 + 120 \times 30 - 1000 = 800.$$

Ce résultat permet d'aborder l'optimisation par dérivation. Dans une situation réelle, il faut toutefois vérifier que la fonction choisie décrit correctement les coûts et les recettes sur l'intervalle considéré.

6.3 Intérêts composés

Un capital initial C_0 placé à un taux annuel r, avec capitalisation annuelle et sans versement ni retrait, évolue selon :

$$C_n = C_0(1+r)^n.$$

Pour un capital de 1000 euros placé à un taux annuel de 3 % pendant cinq ans :

$$C_5 = 1000(1{,}03)^5 \approx 1159{,}27.$$

Le capital final est donc d'environ 1159,27 euros, avant prise en compte d'éventuels frais et prélèvements.

Cet exemple met en évidence la différence entre une évolution additive et une évolution multiplicative.

7 Applications à l'informatique

7.1 Algorithmique et calcul numérique

L'informatique repose sur des objets mathématiques et sur des procédures de calcul explicites.

Un algorithme est une suite finie d'instructions permettant de résoudre une classe de problèmes. Il peut notamment servir à calculer une valeur approchée, à tester une propriété ou à simuler un phénomène.

7.2 Exemple : méthode de dichotomie

On souhaite approcher une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur un intervalle $[a, b]$.

On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que :

$$f(a)f(b) < 0.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires garantit alors l'existence d'au moins une racine dans l'intervalle.

La méthode consiste à :

1. calculer le milieu $m = (a+b)/2$;
2. déterminer le signe de $f(m)$;
3. conserver la moitié de l'intervalle où le signe change ;
4. recommencer jusqu'à obtenir la précision voulue.

À chaque itération, la longueur de l'intervalle est divisée par deux. Après n itérations, elle vaut :

$$\frac{b-a}{2^n}.$$

Pour obtenir une longueur inférieure ou égale à $\varepsilon > 0$, il suffit de choisir n tel que :

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon.$$

La méthode relie ainsi l'analyse, l'algorithmique et le calcul numérique.

7.3 Complexité des algorithmes

La complexité permet d'étudier les ressources nécessaires à l'exécution d'un algorithme en fonction de la taille des données.

Par exemple, une recherche séquentielle dans une liste de n éléments peut nécessiter jusqu'à n comparaisons. Son coût est de l'ordre de n.

Une recherche dichotomique dans une liste triée réduit à chaque étape la zone de recherche de moitié. Le nombre d'étapes est de l'ordre de $\log_2(n)$.

Les mathématiques permettent donc de comparer des algorithmes indépendamment de la vitesse d'une machine particulière.

8 Applications à la géographie et à la cartographie

8.1 Échelles et proportionnalité

Une carte est une représentation réduite d'un territoire. À l'échelle $1 : 50\,000$, une longueur de 1 cm sur la carte représente :

$$50\,000\,\text{cm} = 500\,\text{m}$$

dans la réalité.

Une distance de 7,2 cm sur la carte correspond donc à :

$$7{,}2 \times 500 = 3600\,\text{m},$$

soit 3,6 km.

Cet exemple mobilise la proportionnalité et la conversion des unités.

8.2 Coordonnées et systèmes de projection

Les coordonnées permettent de repérer un point dans un plan ou dans l'espace.

Cependant, la représentation plane de la surface terrestre nécessite une projection cartographique. Aucune projection plane ne conserve simultanément toutes les propriétés géométriques de la sphère.

Selon la projection choisie, on peut privilégier :

— la conservation des angles ;

— la conservation des surfaces ;

— la conservation de certaines distances ;

— une représentation adaptée à une région.

Les mathématiques contribuent ainsi à comprendre les déformations produites par les cartes et à choisir une représentation adaptée à l'usage prévu.

8.3 Distances dans un repère

Dans un repère orthonormé, la distance entre deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Cette formule peut servir à estimer une distance sur une carte plane, à condition de tenir compte de l'échelle et des déformations éventuelles de la projection.

9 Applications aux sciences sociales

9.1 Statistiques descriptives

Les statistiques permettent de résumer une série de données et d'en dégager certaines caractéristiques.

Pour une série $x_1, \dots, x_n$, la moyenne est :

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

La médiane partage une série ordonnée en deux parties de même effectif, selon la convention usuelle de calcul. L'écart interquartile mesure la dispersion de la moitié centrale des observations.

Ces indicateurs interviennent notamment dans les études démographiques, les enquêtes sociales et l'analyse des résultats scolaires.

9.2 Corrélation et causalité

Une corrélation statistique indique une association entre des variables. Elle ne suffit pas à établir qu'une variable est la cause de l'autre.

Une troisième variable peut expliquer une partie de l'association observée. Il peut également exister un biais de sélection ou un effet du hasard.

L'analyse statistique doit donc être accompagnée d'une réflexion sur la collecte des données, la population étudiée et les hypothèses retenues.

9.3 Régression linéaire

Pour étudier la relation entre deux variables quantitatives, on peut ajuster une droite :

$$y = ax + b.$$

Les coefficients peuvent être estimés par la méthode des moindres carrés, qui minimise la somme :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

Cet ajustement permet de décrire une tendance et parfois de réaliser des prévisions. Il convient toutefois de ne pas extrapoler sans précaution en dehors de la plage des données observées.

10 Applications à la chimie et aux sciences de l'environnement

10.1 Concentrations et dilutions

La concentration massique d'une solution est définie par :

$$C_m = \frac{m}{V},$$

où m est la masse de soluté dissous et V le volume de solution, exprimés dans des unités compatibles.

Lors d'une dilution, la quantité de soluté est conservée. En notant C_1, V_1 les caractéristiques initiales et C_2, V_2 celles de la solution diluée, on obtient :

$$C_1 V_1 = C_2 V_2.$$

Si l'on dispose d'une solution à 20 g/L et que l'on souhaite préparer 100 mL d'une solution à 4 g/L, le volume initial nécessaire est :

$$V_1 = \frac{C_2 V_2}{C_1} = \frac{4 \times 100}{20} = 20\,\text{mL}.$$

Il faut donc prélever 20 mL de solution initiale puis compléter avec le solvant jusqu'à obtenir un volume final de 100 mL.

10.2 Décroissance radioactive

La décroissance d'un nombre de noyaux radioactifs peut être modélisée par :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

où $\lambda > 0$ est une constante caractéristique.

La demi-vie $T_{1/2}$ est définie par :

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2}.$$

On en déduit :

$$e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2},$$

puis :

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Ce modèle relie les fonctions exponentielles et logarithmes à un phénomène physique mesurable.

10.3 Bilan environnemental

Les mathématiques sont également utilisées pour étudier les consommations d'énergie, les émissions de gaz à effet de serre, les évolutions de température ou les bilans de matière.

Les tableaux de données, les pourcentages d'évolution, les fonctions et les statistiques permettent de comparer des scénarios et d'étudier des tendances.

Toute conclusion dépend cependant de la qualité des données, des hypothèses de calcul et du périmètre retenu.

11 Enjeux didactiques et pédagogiques

11.1 Donner du sens aux notions mathématiques

Les applications interdisciplinaires permettent de présenter les mathématiques comme un langage de modélisation et non uniquement comme un ensemble de techniques formelles.

Elles peuvent favoriser :

— la motivation et la compréhension des élèves ;

— le transfert des connaissances entre disciplines ;

— la prise d'initiative et la résolution de problèmes ;

— le développement de l'esprit critique ;

— l'usage raisonné des outils numériques.

11.2 Construire une activité interdisciplinaire

Une activité peut suivre les étapes suivantes :

1. présenter une situation issue d'une autre discipline ;
2. faire expliciter la question à résoudre ;
3. identifier les données utiles ;
4. choisir les notions et outils mathématiques ;
5. effectuer les calculs ou construire une simulation ;
6. interpréter les résultats dans le contexte ;
7. discuter les limites et proposer des améliorations.

11.3 Place des outils numériques

Un tableur permet de traiter des données, de construire des graphiques et de comparer plusieurs scénarios.

Un logiciel de géométrie dynamique permet d'étudier des configurations géométriques. Un langage de programmation permet de simuler des phénomènes ou d'implémenter des méthodes numériques.

Ces outils ne remplacent pas le raisonnement mathématique : ils permettent d'explorer, de calculer et de visualiser, à condition que les résultats soient interprétés et vérifiés.

11.4 Points de vigilance

Il convient de distinguer :

— la réalité étudiée et sa représentation mathématique ;

— une relation observée et une relation démontrée ;

— un résultat exact et une valeur approchée ;

— une simulation et une expérience réelle ;

— une corrélation et un lien de causalité.

La précision des unités, l'ordre de grandeur des résultats et la cohérence des hypothèses constituent des éléments essentiels de la validation d'un modèle.

12 Conclusion

Les mathématiques interviennent dans de nombreuses disciplines parce qu'elles permettent de quantifier, de représenter et d'analyser des phénomènes complexes.

Les fonctions décrivent des évolutions, les probabilités permettent de raisonner en situation d'incertitude, les statistiques aident à interpréter des données, la géométrie représente l'espace et l'algorithmique automatise des calculs.

Cependant, l'utilisation des mathématiques ne se réduit pas à appliquer une formule. Elle suppose de construire un modèle adapté, d'expliciter ses hypothèses, d'interpréter les résultats et d'en reconnaître les limites.

Dans l'enseignement, ces applications favorisent le développement de compétences scientifiques transversales et contribuent à montrer l'unité des mathématiques à travers la diversité de leurs usages.

13 Liste d'exercices

Les exercices suivants peuvent être proposés en prolongement de la leçon. Ils couvrent plusieurs niveaux et permettent de travailler la modélisation, le calcul et l'interprétation.

Exercice 1 – Physique : mouvement

Un train se déplace à vitesse constante de 90 km/h.

1. Exprimer la distance parcourue $d(t)$ en fonction du temps t exprimé en heures.
2. Calculer la distance parcourue en 40 minutes.
3. Déterminer le temps nécessaire pour parcourir 225 km.
4. Indiquer une limite du modèle utilisé.

Exercice 2 – Biologie : croissance

Une culture contient initialement 800 bactéries. Le nombre de bactéries triple toutes les deux heures.

1. Écrire une expression de $N(t)$, où t est exprimé en heures.
2. Calculer $N(6)$.
3. Déterminer le temps nécessaire pour dépasser 20 000 bactéries.
4. Discuter la validité du modèle à long terme.

Exercice 3 – Médecine : probabilités

Une maladie touche 2 % d'une population. Un test possède une sensibilité de 95 % et une spécificité de 90 %.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif.
3. Calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.
4. Expliquer pourquoi cette dernière probabilité n'est pas égale à la sensibilité du test.

Exercice 4 – Économie : seuil de rentabilité

Une entreprise supporte un coût fixe de 1200 euros et un coût variable de 15 euros par objet produit. Chaque objet est vendu 27 euros.

1. Déterminer la fonction de coût total $C(q)$.
2. Exprimer la recette $R(q)$.
3. Établir la fonction de bénéfice $B(q)$.
4. Déterminer le seuil de rentabilité.
5. Calculer le bénéfice obtenu pour $q = 150$.

Exercice 5 – Informatique : dichotomie

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 2$ sur $[1, 2]$.

1. Vérifier que f possède une racine dans $[1, 2]$.
2. Effectuer trois étapes de dichotomie.
3. Donner l'intervalle obtenu à l'issue de ces étapes.

4. Déterminer un nombre d'étapes suffisant pour obtenir un intervalle de longueur inférieure à 10^{-4}.
5. Expliquer pourquoi la méthode ne donne pas nécessairement une valeur exacte de la racine.

Exercice 6 – Géographie : échelle

Une carte est réalisée à l'échelle 1 : 25 000.

1. Quelle distance réelle correspond à 4,8 cm sur la carte ?
2. Quelle longueur représente un trajet réel de 3 km ?
3. Expliquer pourquoi la distance mesurée sur une carte peut différer de la distance réelle parcourue sur une route.

Exercice 7 – Chimie : dilution

On dispose d'une solution de concentration massique 15 g/L.

1. Calculer le volume de solution initiale nécessaire pour préparer 250 mL à 3 g/L.
2. Décrire le protocole de dilution.
3. Expliquer pourquoi la relation $C_1V_1 = C_2V_2$ s'applique.

Exercice 8 – Environnement : évolution

Les émissions annuelles d'un équipement sont estimées à 1200 kg de dioxyde de carbone. On suppose qu'elles diminuent de 4 % par an.

1. Construire une suite modélisant les émissions.
2. Calculer les émissions prévues après cinq ans.
3. Déterminer le premier rang pour lequel les émissions deviennent inférieures à 1000 kg.
4. Citer deux hypothèses nécessaires à la validité de cette prévision.

Exercice 9 – Sciences sociales : statistiques

On relève les durées quotidiennes de déplacement, en minutes, de huit personnes :

$$15,\ 20,\ 20,\ 25,\ 30,\ 35,\ 40,\ 95.$$

1. Calculer la moyenne et la médiane.
2. Déterminer l'étendue de la série.
3. Comparer la sensibilité de la moyenne et de la médiane à la valeur extrême.
4. Expliquer quel indicateur paraît le plus représentatif de cette série et pourquoi.

Exercice 10 – Modélisation et esprit critique

Choisir un phénomène issu d'une discipline autre que les mathématiques : consommation électrique, évolution d'une population, circulation routière, croissance économique ou diffusion d'une information.

1. Formuler une question quantitative.
2. Identifier les variables et les données nécessaires.
3. Proposer un modèle mathématique.
4. Effectuer une prévision ou une simulation.
5. Présenter les hypothèses et les limites du modèle.

14 Références bibliographiques et institutionnelles

Références

[1] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du collège et du lycée*. Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Les programmes applicables doivent être consultés en fonction du niveau et de la session du concours.

[2] Ministère de l'Éducation nationale, *Rapports des jurys du CAPES externe de mathématiques*. Rapports des sessions récentes, notamment pour les attentes relatives à la maîtrise disciplinaire et à la démarche d'enseignement.

[3] T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford University Press, 1921. Ouvrage historique sur le développement des mathématiques grecques et leurs relations avec les sciences.

[4] James Stewart, *Calculus : Early Transcendentals*, Cengage Learning. Référence générale sur les fonctions, la dérivation, l'intégration et leurs applications.

[5] OpenStax, *College Physics* et *Introductory Statistics*. Rice University. Manuels libres présentant des applications mathématiques en physique et en statistique. https://openstax.org/

[6] Institut national de la statistique et des études économiques, *Définitions, méthodes et données statistiques*. https://www.insee.fr/

[7] Inria, *Ressources sur l'algorithmique, la simulation et les sciences du numérique*. https://www.inria.fr/

[8] Ministère de l'Éducation nationale, *Éduscol : ressources pour l'enseignement des mathématiques et les approches interdisciplinaires*. https://eduscol.education.fr/

[9] Jean-Pierre Kahane (dir.), *L'enseignement des sciences mathématiques*. Les ressources et rapports de réflexion sur l'enseignement des mathématiques permettent d'approfondir les liens entre savoirs théoriques, applications et formation scientifique.